Gestion de projet à contraintes de ressources

Définitions et notations

Le problème de gestion de projet à contraintes de ressources, noté par la suite **RCPSP**, comprend n *activités* et r *ressources renouvelables*. A chaque instant, la ressource k ($k = 1, \cdots, r$) a une capacité R_k (R_k constant). L'activité i ($i = 1, \cdots, n$) a un temps de traitement de p_i unités de temps. Une activité est toujours traitée sans interruption. Durant le temps de traitement de l'activité i, une quantité constante r_{ik} est utilisée sur la ressource k. Tous les paramètres sont des entiers. Il peut exister des *contraintes de précédences* entre les activités : la relation $i \to j$ signifie que l'activité j ne peut pas démarrer avant que l'activité i ne soit terminée.

L'objectif du problème de gestion de projet à contraintes de ressources est de déterminer les instants de démarrage S_i pour les activités $i = 1, \cdots, n$ tel que :

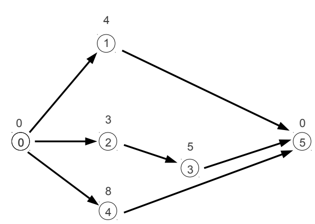
- A chaque instant t, l'utilisation totale de chaque ressource $k = 1, \cdots, r$, par les activités, est inférieure ou égale à R_k.
- Les contraintes de précédences sont respectées : si $i \to j$, alors $S_i + p_i \leq S_j$.

Le vecteur $S = (S_i)$ définit un *ordonnancement* du projet. S est *réalisable* si les contraintes de ressources et de précédences sont satisfaites.

Il est parfois utile d'ajouter au projet une *activité de démarrage* 0 et *une activité de fin* $n+1$ qui indiquent le début et la fin du projet. Ces 2 activités n'utilisent aucune ressource et ont un temps de traitement nul. Ces activités impliquent que $0 \to i$ pour toute activité i n'ayant pas de prédécesseur j tel que $j \to i$ et que $i \to n+1$ pour toute activité i n'ayant pas de successeur j tel que $i \to j$. S_0 correspond au début du projet (en général $S_0 = 0$) et S_n correspond au *temps de réalisation du projet.* On supposera par la suite que ces 2 activités sont toujours intégrées au projet.

Un projet peut être représenté par un *graphe d'activité sur les nœuds* $G = (V, A)$ où V représente toutes les activités ($V = \{0, 1, \cdots, n, n+1\}$) et où A représente les contraintes de précédence du projet. De plus, chaque sommet $i \in V$ est valué avec son temps de traitement p_i.

Exemple Considérons un projet avec $n = 4$ activités, $r = 2$ ressources et une seule relation de précédences $2 \to 3$ (les relations de précédences avec les activités particulières 0 et 5 ne sont pas données). Le graphe d'activité sur les nœuds est le suivant :



Question 1 Considérons le projet donné dans l'exemple. Les $r = 2$ ressources ont respectivement des capacités $R_1 = 5$ et $R_2 = 7$. Les données du projet sont les suivantes :

i	1	2	3	4
p_i	4	3	5	8
r_{i1}	2	1	2	2
r_{i2}	3	5	2	4

Donnez 2 ordonnancements réalisables du projet, donné dans l'exemple, ayant des temps de réalisation différents.

Question 2
(a) Dans un problème d'ordonnancement classique sur une seule machine, n tâches, avec des temps de traitement p_j $(j = 1, \cdots, n)$ et des contraintes de précédence éventuelles, sont traitées sur une seule machine. La machine peut traiter une seule tâche à la fois. A quel problème RCPSP ce problème se ramène-t-il ? Donnez les paramètres RCPSP associés.

(b) Même question si le problème d'ordonnancement ne se fait plus sur une seule machine, mais sur m machines identiques (*i.e.* le temps de traitement p_j de la tâche j ne dépend pas de la machine sur laquelle j est traitée et la tâche j peut être traitée par n'importe quelle machine), où chaque machine peut traiter une seule tâche à la fois.

(c) Même question si le problème considéré ordonnance n tâches sur m machines $(M_1, \cdots, M_m)$ et où chaque tâche j a un temps de traitement p_j et doit être traitée par un sous-ensemble des machines $\mu_j \subseteq \{M_1, \cdots, M_m\}$. Durant son traitement, la tâche j occupe toutes les machines de μ_j. Chaque machine peut traiter une seule tâche à la fois.

Par la suite, nous allons considérer que le problème RCPSP cherche, de plus, à minimiser le temps de réalisation de projet, *i.e.* cherche à obtenir un ordonnancement réalisable ayant le plus petit temps de réalisation. Le problème de décision associé au problème RCPSP consiste à déterminer s'il existe un ordonnancement S réalisable et ayant un temps de réalisation inférieur à un seuil, noté y.

Question 3 Montrez que le problème de décision associé au problème RCPSP appartient à la classe de complexité $\mathcal{NP}$.

Question 4 Montrez que le problème de décision associé au problème RCPSP est NP-complet. Pour cela, vous pourrez utiliser le problème *Partition*. Pour rappel, le problème Partition est le suivant : soient n entiers $a_1, \cdots, a_n$, est-ce qu'il existe un sous-ensemble $I \subset \{1, \cdots, n\}$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i = \frac{1}{2} . \sum_{i=1}^{n} a_i$?

Considérons un problème RCPSP (avec une activité de démarrage 0 et une activité de fin $n+1$). Supposons que $S_0 = 0$. Soit B une borne supérieure au temps de réalisation du problème. On a donc $S_{n+1} \leq B$. Pour chaque activité i, on définit : r_i la borne inférieure au temps de démarrage possible pour i et q_i la borne inférieure à l'intervalle de temps entre la fin de l'activité de i et le temps de réalisation optimal (minimal) du problème considéré.

Question 5 Déterminez comment r_i et q_i peuvent être déterminés à partir du graphe d'activité sur les nœuds associé au problème.

On note $d_i = B - q_i$. Dans un ordonnancement réalisable, l'activité i doit être complètement traitée dans la fenêtre de temps $[r_i, d_i]$.

Question 6 Déterminez les fenêtres de temps des 4 activités de l'exemple de la question 1 sachant que $B = 12$ pour cet exemple.

Par la suite, les relations de précédence $(i \rightarrow j)$ pourront aussi s'appeler des *conjonctions*. Une *relation parallèle* $i||j$ est telle que les activités de i et j sont traitées en parallèle pendant au moins une unité de temps. La négation d'une relation parallèle est appelée une *disjonction* et est notée $i - j$. Dans une disjonction, on a soit $i \rightarrow j$ soit $j \rightarrow i$.

Question 7 Donnez 2 inégalités qui fassent intervenir (pas forcément tous) S_i, p_i, S_j et p_j quand on a une relation parallèle $i||j$.

Question 8 Déterminez C_0 un ensemble initial de conjonctions pouvant être directement déduites de l'entrée du problème RCPSP. Déterminez D_0 un ensemble initial de disjonctions pouvant être directement déduites de l'entrée du problème RCPSP en comparant les consommations de ressources de 2 activités. Déterminez N_0 un ensemble initial de relations parallèles pouvant être déduites de $[r_i, d_i]$.

Question 9 Montrez que pour n'importe quelle paire d'activités i, j, on a $S_j - S_i \geq p_i - B$.

Soit, pour $i, j = 0, \cdots, n+1$,

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ p_i, & \text{si } i \to j \\ -(p_j - 1), & \text{si } i || j \\ p_i - B, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

Question 10 Montrez que pour tout $i, j = 0, \cdots, n+1$, $S_j - S_i \geq d_{ij}$.

La matrice $d = (d_{ij})_{i,j=0,\cdots,n+1}$ est une matrice initiale sur laquelle il est ensuite possible de propager des contraintes sur les activités afin de réduire l'espace des solutions possibles. Cette partie n'est pas traitée dans ce sujet.