Ensembles indépendants dans un graphe
Correction

Partie I

Question 1 Les ensembles indépendants maximaux possibles sont : $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{2,5\}$, $\{4\}$.

$\{1,3\}$ est un ensemble indépendant maximum.

Question 2 On peut considérer l'algorithme suivant :
- Prendre un sommet quelconque v de V et l'ajouter à l'ensemble indépendant.
- Enlever v et les voisins de v de V.
- Recommencer le processus tant que V n'est pas vide.

Question 3 Appelons le problème de décision IS-k.
IS-k est bien dans NP : on peut vérifier en temps polynomial qu'une instance donnée est indépendante et que sa taille est au moins k.

Supposons que nous avons une instance $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$ où C_i $(1 \leq i \leq k)$ est une disjonction de 3 variables prises dans l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}\}$.
Pour chaque variable dans chaque clause, on crée un nœud de G ayant le même label que la variable (il peut donc y avoir plusieurs nœuds avec le même label). Pour chaque clause, on relie les nœuds associés aux variables de la clause (on a donc un triangle par clause). Puis on relie, pour chaque i, les nœuds x_i et $\bar{x_i}$.

Supposons que F a une solution A. On sait qu'on moins une variable de chaque clause est satisfaite dans A. Considérons S l'ensemble des nœuds de G correspondant aux variables satisfaites (en prenant une seule variable satisfaite par clause). Comme chaque clause est satisfaite, S a k nœuds. Comme on choisit une seule variable par clause, l'indépendance n'est pas violée au sein de chaque triangle (associé à une clause). Puisque les seules arêtes qui relient les triangles sont associées aux nœuds x_i et $\bar{x_i}$, alors un seul des nœuds peut être sélectionné dans S. Donc S est un ensemble indépendant de taille k.

Supposons maintenant que nous avons un ensemble indépendant de taille k. Puisque S est indépendant, au plus un nœud a été choisi dans chaque triangle. Puisque S est de taille k, alors S contient exactement un nœud dans chaque triangle. Puisque S est indépendant, x_i et $\bar{x_i}$ ne peuvent pas avoir été sélectionnés en même temps. Considérons donc les variables associées aux nœuds de S de telle sorte qu'elles satisfassent F. Les autres variables peuvent prendre n'importe quelle valeur arbitraire. La solution A obtenue satisfait F.

On a donc montré que 3SAT $\propto$ IS-k.

Question 4 On peut noter qu'un sommet quelconque de G appartient à un ensemble indépendant maximum ou n'appartient pas à cet ensemble. Si le sommet appartient à un ensemble indépendant maximum, alors ses voisins ne peuvent pas appartenir à cet ensemble.

Question 5 L'algorithme 1 est récursif. Il choisit un nœud u quelconque, puis ensuite il y a 2 appels récursifs : un sur G privé de u et de ses voisins (u est donc inclus dans l'ensemble indépendant maximum) ; un sur G privé de u (u n'est pas inclus dans l'ensemble indépendant maximum). L'algorithme retourne la taille des ensembles indépendants maximum.

A chaque passage de l'algorithme, on a 2 appels et on passe autant de fois qu'il y a de nœuds. On a donc une complexité en $O(2^{|V|})$.

Question 6 Si u n'a pas de voisins, il est forcément dans un ensemble indépendant maximum, donc il n'est pas nécessaire d'appeler la ligne 6 de l'algorithme.

Partie II

Question 7 Une ronde suffit pour connaître les identifiants de ses voisins.

Question 8 On est dans le pire cas quand un seul nœud décide à chaque ronde. C'est le cas par exemple sur un graphe en ligne où tous les identifiants sont rangés par ordre croissant. Dans ce cas, $|V|$ rondes sont nécessaires.

Question 9 Les lignes 2-7 de l'algorithme assurent que 2 nœuds voisins ne vont pas rejoindre le MIS en même temp. Les lignes 8-9 assurent que quand un nœud a joint un MIS, ses voisins ne pourront pas le rejoindre.

Question 10 Soit M l'ensemble des nœuds marqués à l'étape 1. Soit $H(v)$ l'ensemble des voisins de v de plus haut degré ou de degré équivalent avec un identifiant plus grand. Les choix de v et des nœuds de $H(v)$ sont indépendants.

$Proba(v$ ne soit pas dans MIS ; $v \in M) = Proba(\exists w \in H(v)$ tq $w \in M) \leq \sum_{w\in H(v)} Proba(w \in M)$. Puisque $Proba(w \in M) = \frac{1}{2.d(w)}$, alors

$Proba(v$ ne soit pas dans MIS ; $v \in M) \leq \sum_{w\in H(v)} \frac{1}{2.d(w)} \leq \sum_{w\in H(v)} \frac{1}{2.d(v)} \leq \frac{1}{2}$.

Question 11 Soit v un bon nœud. S'il existe w un voisin de v ayant un degré au plus 2, alors d'après la question précédente, w rejoint le MIS avec probabilité au moins $\frac{1}{8}$.
Donc v sera éliminé à la ligne 9 avec une probabilité d'au moins $\frac{1}{8} \geq \frac{1}{36}$.

Supposons maintenant que tous les voisins de v sont de degré au moins 3. Pour tout voisin w : $\frac{1}{2.d(w)} \leq \frac{1}{6}$. Puisque $\sum_{w\in H(v)} \frac{1}{2.d(w)} \geq \frac{1}{6}$, il existe un sous-ensemble S de voisins de v tel que $\frac{1}{6} \leq \sum_{w\in H(v)} \frac{1}{2.d(w)} \leq \frac{1}{3}$.

$Proba(v$ devienne inactif$) \geq Proba(\exists u \in S; u \in MIS)$

$Proba(v$ devienne inactif$) \geq \sum_{u\in S} Proba(u \in MIS) - \sum_{u,w\in S, u\neq w} Proba(u \in MIS$ et $w \in MIS)$ (en utilisant le principe inclusion - exclusion tronqué après le 2e terme).

On a $Proba(u \in M) \geq Proba(u \in MIS)$. Donc,

$Proba(v$ devienne inactif$) \geq \sum_{u\in S} Proba(u \in MIS) - \sum_{u,w\in S, u\neq w} Proba(u \in M$ et $w \in M)$

$Proba(v$ devienne inactif$) \geq \sum_{u\in S} Proba(u \in MIS) - \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} Proba(u \in M).Proba(w \in M)$

$Proba(v$ devienne inactif$) \geq \sum_{u\in S} \frac{1}{4.d(u)} - \sum_{u\in S}\sum_{w\in S} \frac{1}{4.d(u)}.\frac{1}{4.d(w)} \geq \sum_{u\in S} \frac{1}{2.d(u)}(\frac{1}{2} - \sum_{w\in S}\frac{1}{2.d(w)}) \geq \frac{1}{36}$.

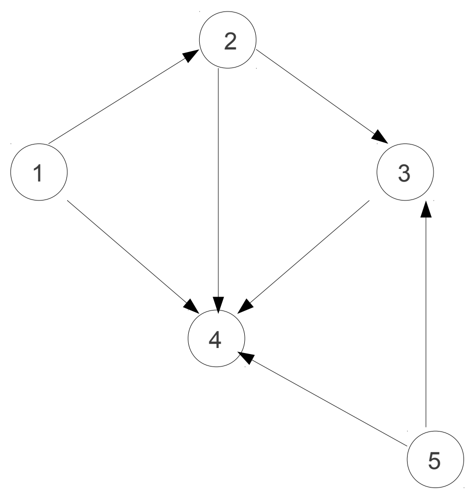
Question 12 Voir la figure 1.

Question 13 Supposons la proposition contraire pour un nœud v. Dans ce cas, au moins un-tiers des arêtes ont été orientées vers le nœud, ce qui implique qu'au moins un-tiers des voisins a un degré au plus $d(v)$ (voisins dans S). On a donc :

$\sum_{w\in N(v)} \frac{1}{2.d(w)} \geq \sum_{w\in S} \frac{1}{2.d(w)} \geq \sum_{w\in S} \frac{1}{2.d(v)} \geq \frac{d(v)}{3}.\frac{1}{2.d(v)} = \frac{1}{6}$. Ce qui contredit la proposition que v est mauvais.

Question 14 D'après la question précédente, le nombre d'arêtes orientées vers les mauvais nœuds est au plus la moitié du nombre d'arêtes sortant des mauvais nœuds. Donc le nombre d'arêtes orientées vers les mauvais nœuds est au plus la moitié du nombre d'arêtes. Ainsi, au moins la moitié des arêtes sont orientées

Figure 1 – Graphe orienté de la question 12



vers des bons nœuds, et ces arêtes sont bonnes.