Déroulement de l'épreuve

Le sujet, volontairement très long, se compose de deux problèmes indépendants. Le candidat pourra au choix se concentrer sur l'un des deux problèmes ou les aborder tous les deux.

Le temps de préparation est de 2 heures. Ensuite le candidat exposera les résultats obtenus pendant 1 heure à l'oral. Bien entendu, le jury posera des questions et pourra revenir sur des questions omises par le candidat.

Il est autorisé d'admettre le résultat d'une question pour ne pas rester bloqué lors de la phase de préparation.

Il est enfin demandé au candidat de mentionner en tout début d'oral quelles questions il a traitées dans les deux problèmes. Cela permettra au jury de gérer au mieux son temps et de permettre au candidat de présenter l'intégralité des résultats obtenus lors de la préparation.

La rigueur du raisonnement scientifique est un point capital dans l'évaluation de l'épreuve.

Ensembles indépendants dans un graphe

Notations

Dans ce problème, nous nous intéressons au calcul d'ensembles indépendants.

Etant donné un graphe non orienté $G = (V, E)$, un *ensemble indépendant* est un sous-ensemble de nœuds $U \subseteq V$ tel que, pour toute paire de nœuds de U, les deux nœuds ne sont pas voisins dans G. Deux nœuds u et v sont voisins si et seulement si l'arête (u, v) appartient à E. Un ensemble indépendant est *maximal* si aucun nœud ne peut être ajouté à l'ensemble indépendant sans violer la contrainte d'indépendance. Le plus grand ensemble indépendant (parmi tous les ensembles indépendants possibles de G) est appelé *ensemble indépendant maximum.*
L'ensemble des voisins d'un nœud u est noté $N(u)$.

Partie I

Question 1 Enumérez tous les ensembles indépendants maximaux de la figure 1. Donnez un ensemble indépendant maximum.

Question 2 Donnez un algorithme simple qui calcule un ensemble indépendant maximal en pacourant les nœuds dans un ordre arbitraire.

Question 3 Montrez que le calcul d'un ensemble indépendant maximum est un problème NP-complet. Pour cela, vous partirez du problème de décision suivant : étant donnés un graphe G et un entier k, est-ce qu'il existe un ensemble indépendant dans G avec au moins k sommets ? Vous pourrez vous aider du problème 3SAT qui est un problème NP-complet.

Question 4 Quelle remarque simple peut-on faire sur l'appartenance ou non d'un sommet à un ensemble indépendant maximum ? De la même manière, que peut-on en déduire sur les voisins de ce sommet ?

Question 5 Quelle est la sortie de l'algorithme 1 ? Quelle est sa complexité ?

Algorithm 1 Algo 1(G)

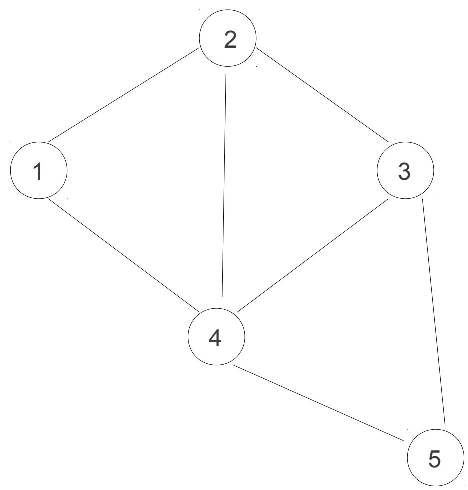
if $G = \varnothing$ **then**
  return 0
else
  $u \leftarrow$ nœud de G
  avecu $\leftarrow 1 +$ Algo 1($G - (N(u) \bigcup \{u\})$)
  sansu $\leftarrow$ Algo 1($G - \{u\}$)
  return max(avecu,sansu)
end if

Question 6 Peut-on simplifier l'algorithme 1 dans le cas où certains nœuds n'ont pas de voisin ?

Partie II

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des algorithmes distribués pour déterminer un ensemble indépendant maximal. Nous supposons que chaque nœud a un identifiant unique et que les nœuds peuvent

Figure 1 – Un graphe



communiquer avec leurs voisins. Nous supposons que les algorithmes distribués sont découpés en rondes synchronisées. Dans une ronde, chaque nœud peut envoyer un message (éventuellement différent) à tous ses voisins, recevoir un message de chacun de ses voisins et faire un (ou des) calcul.

Question 7 En combien de rondes chaque nœud peut connaître les identifiants de ses voisins ?

Nous supposons par la suite que chaque nœud connaît les identifiants de ses voisins.

Algorithm 2 MIS Distribué $1(G, v)$

---

if v a un identifiant plus grand que ceux de ses voisins **then**
    v décide de joindre l'ensemble indépendant maximal et v informe ses voisins de son choix (en leur envoyant un message)
end if
if tous les voisins de v avec des identifiants plus grands ont décidé de ne pas joindre l'ensemble indépendant maximal **then**
    v décide de joindre l'ensemble indépendant maximal et v informe ses voisins de son choix
end if
if un voisin de v avec un identifiant plus grand a décidé de joindre l'ensemble indépendant maximal **then**
    v décide de ne pas joindre l'ensemble indépendant maximal et v informe ses voisins de son choix
end if

Question 8 Chaque nœud du graphe G peut effectuer l'algorithme 2 pour déterminer un ensemble indépendant maximal de manière distribuée. Dans le pire cas, combien de rondes seront nécessaires ?

Chaque nœud du graphe G peut aussi effectuer l'algorithme 3 pour déterminer un ensemble indépendant maximal de manière distribuée. Au départ, chaque nœud est actif. Quand un nœud devient inactif, il arrête d'appeler l'algorithme 3. Quand deux nœuds voisins ont le même degré, il est possible de les départager avec leur identifiant.

Algorithm 3 MIS Distribué $2(G, v)$

1: v se marque avec probabilité $\frac{1}{2.d(v)}$ où $d(v)$ est le degré du nœud v et informe ses voisins de son marquage (par l'envoi d'un message)
2: **if** v est marqué et aucun voisin actif de v de degré supérieur est aussi marqué **then**
3:     v décide de joindre l'ensemble indépendant maximal et informe ses voisins de son choix
4: **end if**
5: **if** v est marqué et un voisin de v de degré supérieur est marqué **then**
6:     v se démarque
7: **end if**
8: **if** v ou un voisin de v a joint l'ensemble indépendant maximal **then**
9:     v devient inactif et informe ses voisins de son inactivité
10: **end if**

Question 9 Montrez que l'algorithme donne bien un ensemble indépendant.

Question 10 Montrez qu'un nœud v joint l'ensemble indépendant maximal à la ligne 3 avec probabilité $p \geq \frac{1}{4.d(v)}$.

Un nœud v est appelé *bon* si $\sum_{w \in N(v)} \frac{1}{2.d(w)} \geq \frac{1}{6}$. Sinon, v est appelé *mauvais* nœud.

Question 11 Montrez qu'un bon nœud v devient inactif à la ligne 9 avec probabilité $p \geq \frac{1}{36}$. Vous pourrez distinguer les voisins de v qui ont un degré d'au plus 2 et les voisins de v qui ont un degré d'au moins 3.

Une arête $e = (u, v)$ est appelée *mauvaise* si u et v sont tous les deux mauvais. Sinon, l'arête est appelée *bonne*. Pour pouvoir répondre aux questions suivantes, il faut construire un graphe auxiliaire orienté : chaque arête est orientée vers le nœud de plus fort degré (ou vers le nœud de plus fort identifiant dans le cas où les deux nœuds voisins ont le même degré).

Question 12 Construire le graphe auxiliaire orienté à partir du graphe de la figure 1.

Question 13 Montrez qu'un mauvais nœud a un degré sortant qui est au moins deux fois son degré entrant.

Question 14 Montrez que la moitié des arêtes de G sont bonnes.

Tous les chemins mènent à Rome

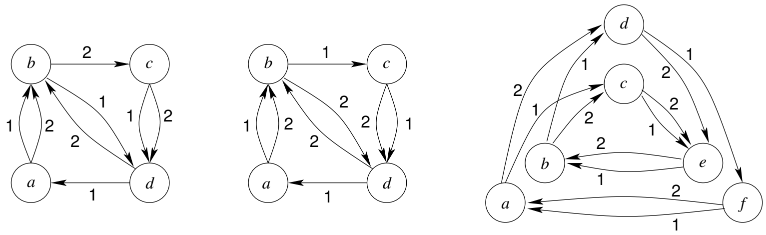
On considère les graphes orientés $G = (V, A)$ *fortement connexes* avec V l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs, où tous les sommets sont de degré sortant d fixé (le degré sortant de x est le nombre d'arcs sortants de x). On admet les boucles et les arcs multiples (qui comptent bien sûr dans le degré sortant). On notera n le nombre de sommets. On notera $x \xrightarrow{a} y$ s'il existe un arc du sommet x vers le sommet y et qu'il est étiqueté par la lettre a.

Pour rappel, G est fortement connexe si pour tout couple $x, y \in V$, il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x. D'autre part, un cycle est un chemin dont le sommet de départ et de fin sont identiques (on autorise ici à passer plusieurs fois par un même sommet). Sa longueur est son nombre d'arcs.

Pour un tel graphe, un *fléchage* est une application f de A dans $\{1, 2, \ldots, d\}$ telle que pour chaque sommet $x \in V$ l'image des d arcs sortants est exactement $\{1, 2, \ldots, d\}$ (chaque entier apparaît sur un arc sortant et un seul). Un *graphe fléché* est un graphe muni d'un fléchage.

Un *mot synchronisant* w est un mot sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, \ldots, d\}$ tel que si l'on suit la séquence des arcs étiquetés par la suite des lettres de w, peu importe de quel sommet on part, on termine sur le même sommet.

Question 1. Pour chacun des graphes fléchés ci-dessous, déterminer s'il existe un mot synchronisant.



Question 2. Soit $G = (V, A)$ un graphe fléché. Montrer que si G possède un mot synchronisant, alors pour tout sommet v, il existe un mot w_v tel que si l'on suit la séquence des arcs étiquetés par la suite des lettres de w_v, peu importe de quel sommet on part, on termine sur le sommet v.

Question 3.

(a) Étant donné un graphe fléché, montrer que l'ensemble des mots synchronisant est un langage rationnel. On rappelle qu'un langage rationnel est un ensemble de mots finis reconnus par un automate fini ou de façon équivalente décrit par une expression rationnelle.

(b) En déduire un algorithme (naïf) qui, étant donné un graphe fléché, teste s'il existe un mot synchronisant. Vous préciserez la complexité de votre algorithme (en fonction de n et de d).

(c) En déduire une borne sur la longueur du plus court mot synchronisant (lorsqu'il en existe un).

Question 4. On souhaite améliorer la complexité de l'algorithme de la question précédente.

(a) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mot synchronisant pour le fléchage est que pour toute paire x, y de sommets, il existe un mot "synchronisant” ces deux sommets, c.à.d. dont la lecture depuis x et depuis y amène au même sommet

(b) En déduire un algorithme polynomial en n et en d qui étant donné un graphe fléché détermine s'il existe un mot synchronisant.
(c) En déduire une borne polynomiale sur la longueur du plus court mot synchronisant (lorsqu'il en existe un).

On considère maintenant un graphe sans fléchage. Une condition suffisante pour qu'un tel graphe admette un fléchage où il existe un mot synchronisant, est donnée par le *Road-map Coloring Theorem* [Trahtman, 2009] : *Pour un graphe fortement connexe G, si le PGCD des longueurs des cycles de G vaut 1, alors G admet un fléchage avec un mot synchronisant.*

Question 5. Montrer que s'il existe une boucle dans $G = (V, A)$ (c'est à dire un sommet v tel que $(v, v) \in A$), il existe effectivement un fléchage admettant un mot synchronisant. N'oubliez-pas que tous les graphes de l'exercice sont fortement connexes !

Question 6. On souhaite montrer que la condition suffisante du *road map coloring* théorème est aussi une condition nécessaire. Plus précisément : s'il existe un fléchage avec mot synchronisant alors le PGCD des longueurs des cycles vaut 1.
(a) Soit p le PGCD des longueurs des cycles de $G = (V, A)$, montrer qu'il existe une partition $V_0, V_1, \ldots, V_{p-1}$ des sommets V tel que tout arc va forcément d'une partie V_i vers une partie $V_{(i+1) \bmod p}$, c.à.d. $\forall 0 \leq i \leq p-1$, $\forall\, x \in V_i$, $(x, y) \in A \implies y \in V_{(i+1) \bmod p}$.
(b) Conclure.

Question 7. On considère un graphe orienté $G = (V, A)$ fortement connexe de degré sortant 2, qui admet un fléchage tel que les arcs étiquetés par la lettre 1 forment un cycle sur V, ce qui n'est pas le cas des arcs étiquetés par la lettre 2. Montrer que si $|V|$ est premier, il existe un mot synchronisant. Et si $|V|$ n'est pas premier ?