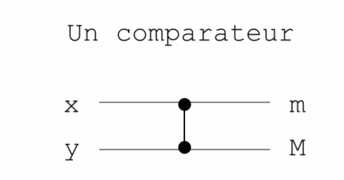
Réseaux de tri

Un *comparateur* est un dispositif à deux entrées x, y et deux sorties m, M telles que $m = \min(x, y)$ et $M = \max(x, y)$. Dans les figures, on utilisera la représentation suivante :



Un *réseau de comparateurs* est un ensemble de comparateurs tel qu'une sortie (*resp.* une entrée) ne peut être connectée qu'à une entrée (*resp.* une sortie) qui de plus ne comprend pas de cycle. Une entrée (*resp.* une sortie) d'un réseau est une entrée (*resp.* une sortie) d'un comparateur non connectée. Observez qu'un réseau a autant d'entrées (notées $e_1, \ldots, e_n$) que de sorties (notées $s_1, \ldots, s_n$). Un *réseau de tri* est un réseau de comparateurs tel que les sorties correspondent aux entrées triées.

Question 1. Décrire un réseau de tri pour 4 entrées.

Question 2. Soit f une fonction croissante. Montrer que si un réseau sur les entrées $a_1, \ldots, a_n$ renvoie les sorties $b_1, \ldots, b_n$, alors ce réseau sur les entrées $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ renvoie les sorties $f(b_1), \ldots, f(b_n)$.

Question 3. Montrer que si un réseau trie des entrées composées uniquement de 0 et de 1 alors c'est un réseau de tri (c'est à dire qu'il trie correctement toutes entrées pas seulement celles uniquement composées de 0 et de 1). On pourra pour cela prouver la contraposée et utiliser la question précédente pour une fonction f bien choisie

Une séquence de bits $a_1, \ldots, a_n$ est dite *bitonique* si :
- Soit elle est monotone.
- Soit il existe un entier i tel que les séquences $a_1, \ldots, a_i$ et $a_i, \ldots, a_n$ soient monotones.

Un *séparateur* est un réseau à 2^k entrées qui sur une entrée bitonique (de taille 2^k) produit une sortie $s_1, \ldots, s_{2^k}$ telle que

1. $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}}$ et $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k}$ sont des séquences bitoniques.
2. L'une des $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}}$ et $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k}$ ne comprend que des 1 ou des 0.
3. Tous les $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}}$ sont inférieurs ou égaux à tous les $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k}$.

Question 4. Construire un séparateur composé de 2^{k-1} comparateurs.

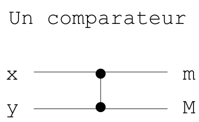
Question 5. En déduire un réseau composé de $k2^{k-1}$ comparateurs qui prend en entrée une séquence bitonique et renvoie la séquence triée.

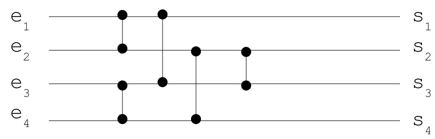
Question 6. Transformer le réseau précédent en réseau dit de fusion qui lorsque les sous-séquences $e_1, \ldots, e_{2^{k-1}}$ et $e_{2^{k-1}+1}, \ldots, e_{2^k}$ sont triées renvoie une séquence triée.

Question 7. En déduire un réseau de tri composé de $\frac{k(k+1)}{2}2^{k-1}$ comparateurs.

Correction

Question 1. La figure ci-dessous introduit les notations et répond à la question.





Question 2.

Indication. *Ceci se démontre par récurrence sur la taille du réseau en considérant pour le pas de l'induction un comparateur, dont les deux sorties ne sont pas connectées.*

Si l_i et l_j $(i < j)$ sont les deux « lignes » connectées à ce comparateur et u_i, u_j les valeurs d'entrées de ce comparateur pour les entrées $a_1, \ldots, a_n$ alors par hyp. de récurrence $f(u_i), f(u_j)$ sont les valeurs d'entrées de ce comparateur pour les entrées $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ et les valeurs de sorties sont $\min(f(u_i), f(u_j))$ et $\max(f(u_i), f(u_j))$ respectivement égales à $f(\min(u_i, u_j))$ et à $f(\max(u_i, u_j))$ en raison de la croissance de f.

Question 3.

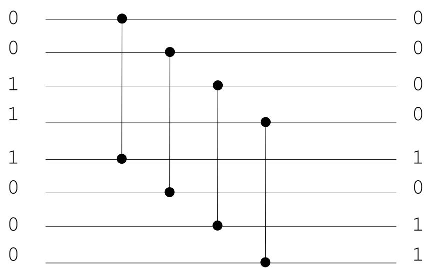
Indication. *On va démontrer la contraposée pour une fonction f judicieusement choisie* .

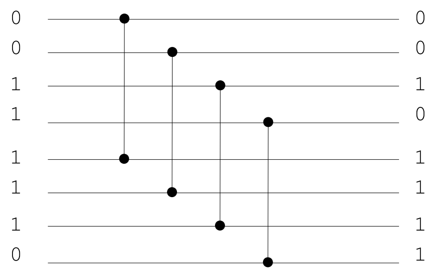
Supposons qu'on n'ait pas affaire à un réseau de tri. Dans ce cas, il existe une séquence d'entrée $a_1, \ldots, a_n$ et deux indices $i < j$ t.q. $b_i > b_j$ avec $b_1, \ldots, b_n$ séquence de sortie. Appliquons la fonction croissante $f(x) = 1_{x \geq b_i}$ aux entrées $a_1, \ldots, a_n$. La séquence d'entrée devient une séquence de bits et $f(b_i) = 1 > 0 = f(b_j)$. Ce réseau ne trie donc pas des séquences de bits.

Question 4.

Indication. *On donnera le séparateur.*

Les 2^{k-1} comparateurs travaillent en parallèle et comparent les paires $e_i, e_{2^{k-1}+i}$. Nous avons représenté le séparateur à 8 entrées avec deux exécutions.



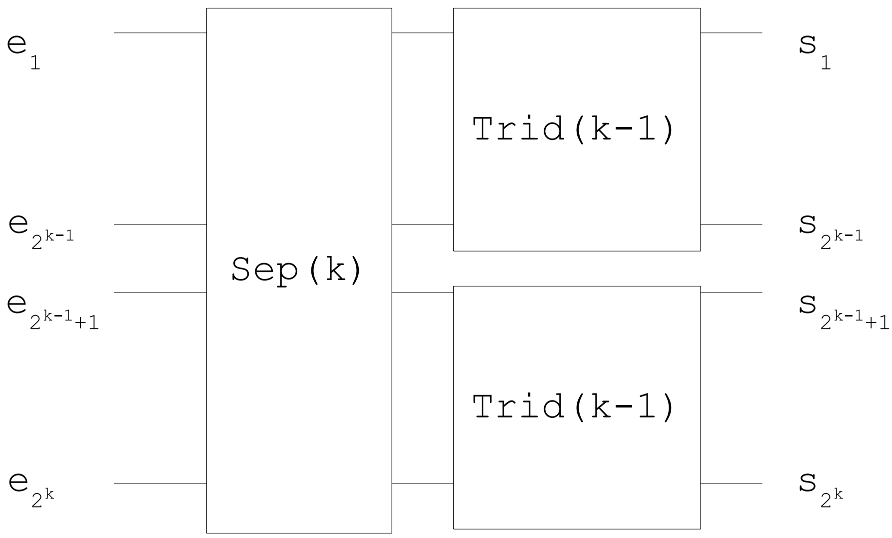


Nous considérons une séquence d'entrée bitonique commençant par des 0, se poursuivant par des 1 à partir de l'indice d et se terminant par des 0 à partir de l'indice f. Les autres cas sont similaires ou plus simples. Les sous-cas à étudier sont :

- $f \leq 2^{k-1}$: la séquence $e_{2^{k-1}+1}, \ldots, e_{2^k}$ n'est constituée que de 0. Par conséquent, $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}} = 0, \ldots, 0$ et $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k} = e_1, \ldots, e_{2^{k-1}}$. Ce qui établit les trois propriétés.
- $d > 2^{k-1}$: la séquence $e_1, \ldots, e_{2^{k-1}}$ n'est constituée que de 0. Par conséquent, $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}} = 0, \ldots, 0$ et $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k} = e_{2^{k-1}+1}, \ldots, e_{2^k}$. Ce qui établit les trois propriétés.

– $d \leq 2^{k-1} < f \wedge f - d \geq 2^{k-1}$: il y a au moins un 1 à chaque entrée de comparateur. Donc la séquence $s_{2^{k-1}+1}, \ldots, s_{2^k} = 1, \ldots, 1$. D'autre part, $\forall i\ i < d \Rightarrow s_i = 0$, $\forall i\ d \leq i < f - 2^{k-1} \Rightarrow s_i = 1$ et $\forall i\ f - 2^{k-1} \leq i \leq 2^{k-1} \Rightarrow s_i = 0$. Ce qui établit les trois propriétés.
– $d \leq 2^{k-1} < f \wedge f - d < 2^{k-1}$: il y a au moins un 0 à chaque entrée de comparateur. Donc la séquence $s_1, \ldots, s_{2^{k-1}} = 0, \ldots, 0$. D'autre part, $\forall i\ 2^{k-1} < i < f \Rightarrow s_i = 1$, $\forall i\ f \leq i < d + 2^{k-1} \Rightarrow s_i = 0$ et $\forall i\ d + 2^{k-1} \leq i \leq 2^k \Rightarrow s_i = 1$. Ce qui établit les trois propriétés.

Question 5. Appelons $Sep(k)$ le séparateur à 2^k entrées et $Trid(k)$ le trieur de séquences bitoniques. La figure ci-dessous montre comment construire inductivement $Trid(k)$.

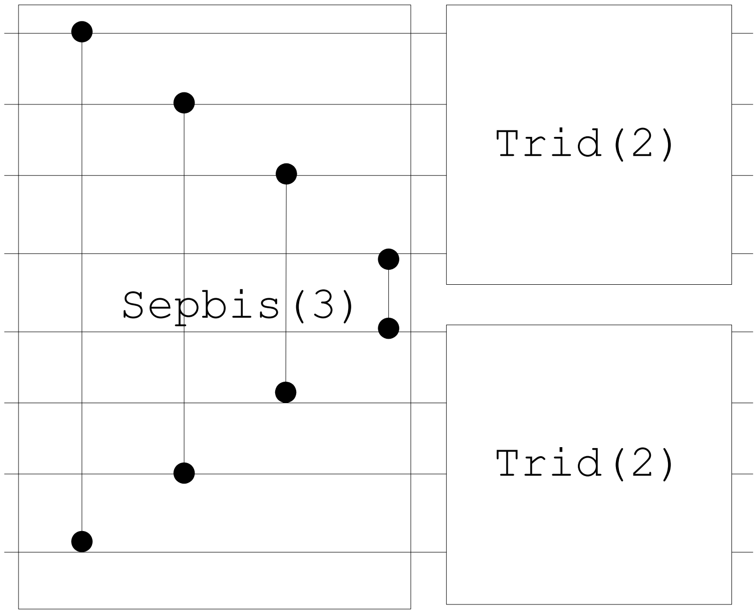


Soit n_k la taille de $Trid(k)$, n_k vérifie la formule de récurrence. $n_1 = 1$ et $n_k = 2^{k-1} + 2n_{k-1}$. En remplaçant n_k par la valeur indiquée, on obtient $k2^{k-1} = 2^{k-1} + 2(k-1)2^{k-2}$ qui est une formule valide.

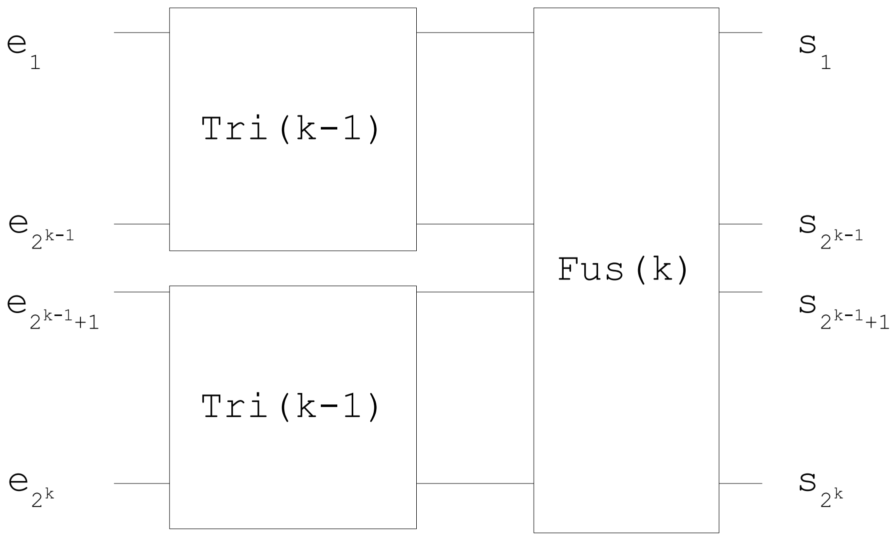
Question 6.

Indication. *Ramener ce cas au cas de la question précédente.*

La transformation est très simple si on remarque qu'en retournant la deuxième sous-séquence triée, on obtient une séquence bitonique de telle sorte qu'on puisse appliquer $Trid(k)$ mais on peut éviter le retournement en combinant son effet avec le séparateur. Ce qui nous donne un réseau $Sepbis(k)$ de 2^{k-1} comparateurs qui comparent e_i et e_{2^k+1-i}. Nous avons représenté ci-dessous $Fus(3)$ ($Fus(k)$ est le fusionneur à 2^k entrées).



Question 7. Appelons $Tri(k)$ le trieur à 2^k entrées. La figure ci-dessous montre comment construire inductivement $Tri(k)$.



Soit m_k la taille de $Tri(k)$, m_k vérifie la formule de récurrence. $m_1 = 1$ et $m_k = k2^{k-1} + 2m_{k-1}$. En remplaçant m_k par la valeur indiquée, on obtient $\frac{k(k+1)}{2}2^{k-1} = k2^{k-1} + 2\frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}$ qui est une formule valide.