Coloriage de graphes
Correction

Partie I

Question 1 Non, car quand le graphe est colorié avec 2 couleurs, 2 sommets voisins auront la même couleur. $\chi(G) = 3$.

Question 2 Dans une clique, tous lessommets sont reliés. Donc un coloriage correct de la clique a au moins autant de couleurs que le nombre de sommets. Donc $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graphe G.

Question 3 Le graphe G de la figure 1 vérifie $\chi(G) > \omega(G)$.

Question 4 Puisque chaque nœud a au plus $\Delta(G)$ voisins, il y a toujours au moins une couleur libre dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$. Donc on utilise au maximum $\Delta(G) + 1$ couleurs.

Question 5 Lorsqu'on examine le sommet i, au plus $min(d_i, i-1)$ voisins ont été coloriés précédemment. Donc la couleur allouée au sommet i est au plus $1 + min(d_i, i-1)$. Puisque cette propriété est vérifiée pour tout sommet i, le graphe est colorié avec au plus $1 + max_{i \in [1,n]} min(d_i, i-1)$.

Question 6 Voir la figure 2.

Question 7 Voir la figure 3.

Question 8 Considérons une représentation par intervalle de G. On ordonne les sommets selon les extrémités gauches des intervalles et appliquons l'algorithme 1. Supposons que x a reçu la couleur k, couleur la plus grande allouée. Puisque x n'a pas reçu de couleur plus petite, cela signifie que l'extrémité gauche de l'intervalle associé appartient à des intervalles ayant été précédemment coloriés avec des couleurs de 1 à $k-1$. Puisque tous ces intervalles partagent le point x, ils s'intersectent donc. On a donc une clique de cardinalité k dans le graphe associé. Donc $\omega(G) \geq k$. Or $k \geq \chi(G)$, d'où $\omega(G) \geq \chi(G)$. Puisqu'on a montré à la question 2 que $\omega(G) \leq \chi(G)$, alors $\omega(G) = \chi(G)$

Partie II

Question 9 Si $\Delta(G) \leq 2$, alors G est un chemin ou un cycle pair. Donc $\chi(G) = 2 \leq \Delta(G)$.

Question 10 Sinon, on pourrait colorier v avec une couleur entre 1 et Δ, ce qui impliquerait l'existence d'une Δ-coloration correcte pour G. Ceci contredit l'hypothèse que G n'est pas Δ-coloriable.

Question 11 Sinon on pourrait interchanger les couleurs i et j dans la composante connexe de $H_{i,j}$ contenant v_j par exemple. Ceci contredit le fait que les voisins de v utilise des couleurs différentes (toutes les couleurs $1, \dots, \Delta$).

Question 12 Soit P un chemin de v_i à v_j dans $C_{i,j}$. $d_H(v_i) \leq \Delta - 1$, donc les voisins de v_i sont tous de couleurs différentes. Sinon on pourrait recolorier v_i, ce qui contredit l'assertion montrée à la question 10. Donc le voisin de v_i dans P est le seul voisin de v_i dans $C_{i,j}$. De même, le voisin de v_j dans P est le seul voisin de v_j dans $C_{i,j}$.

Si $C_{i,j} \neq P$, alors P a un sommet interne u avec trois voisins dans H colorés identiquement. Donc au plus $\Delta - 2$ couleurs sont utilisées par les voisins de u qui peut donc être recoloré. Après cette nouvelle coloration,

FIGURE 1 – Un exemple de réponse à la question 3

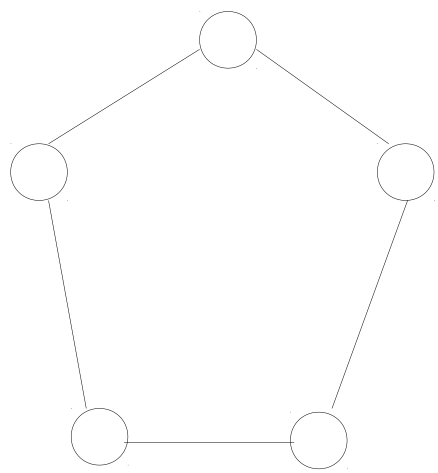


FIGURE 2 – Un exemple de réponse à la question 6

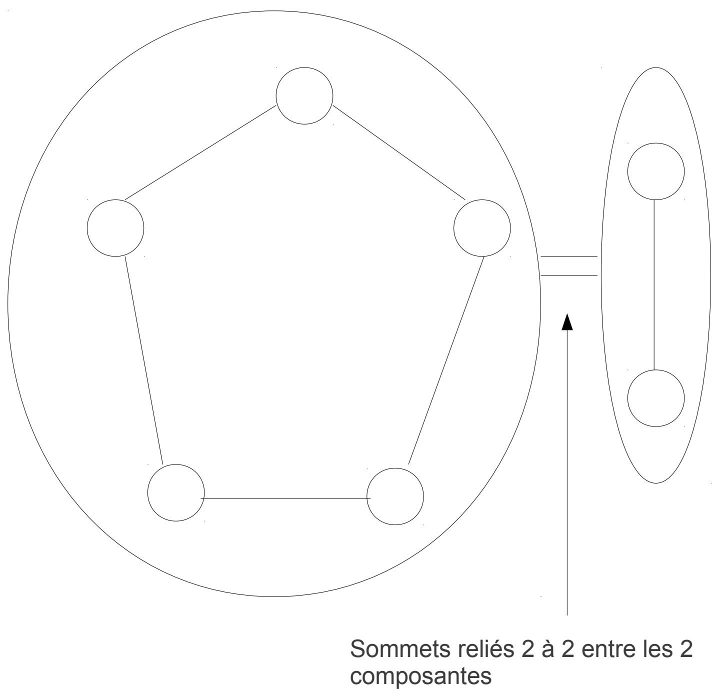
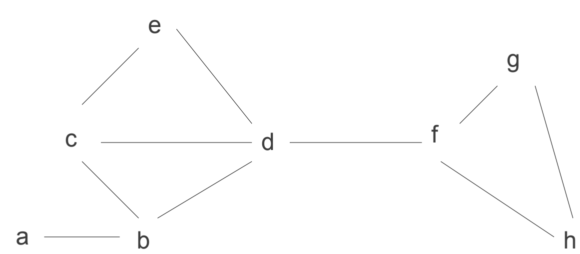


Figure 3 – Réponse à la question 7



v_i et v_j appartiendraient à 2 composantes différentes dans $H_{i,j}$, ce qui contredit l'assertion montrée à la question 11.

Question 13 Si $u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$ et $u \neq v_i$, alors u possède 2 voisins coloriés par j et 2 voisins coloriés par k. Là encore, on peut recolorier u, ce qui impliquerait que v_i et v_j sont dans 2 composantes différentes de $H_{i,j}$.

Question 14 G n'est pas un graphe complet, donc considérons 2 sommets de G v_1 et v_2 non adjacents et voisins de v. Soit u différent de v_2, voisin de v_1 dans $C_{1,2}$. u a la couleur 2. Puisque $\Delta(G) \geq 3$, il existe un sommet v_3 voisin de v. Interchangeons les couleurs 1 et 3 dans $C_{1,3}$. On obtient une nouvelle coloration de H. Avec le nouveau coloriage, u appartient à $C'_{2,3}$ puisque v_1 a maintenant la couleur 3. $u \in C_{1,2} \setminus \{v_1\} = C'_{1,2}$. Donc $u \in C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$, ce qui contredit l'assertion montrée à la question 13.