Coloriage de graphes

Notations

Un *k-coloriage* d'un graphe $G = (V, E)$ est un étiquetage $f : V \to S$ avec $|S| = k$. Les étiquettes sont appelées *couleurs*. Un k-coloriage est dit *correct* si les sommets voisins ont des couleurs différentes. Un graphe est dit *k-coloriable* s'il existe un k-coloriage correct de ce graphe. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est le plus petit k tel que G est k-coloriable.

$d(v)$ est le degré du sommet v et $\Delta(G)$ est le degré maximal du graphe G.

Partie I

Question 1 Est-ce que le graphe de la figure 1 est 2-coloriable ? Quel est son nombre chromatique ?

Soit $\omega(G)$ le cardinal de la plus grande clique contenue dans G.

Question 2 Montrer que, pour tout graphe G, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Question 3 Construire un graphe G pour lequel $\chi(G) > \omega(G)$.

L'algorithme de coloriage glouton, donné par l'algorithme 1, fournit un coloriage correct du graphe G.

Algorithm 1 Coloriage glouton(G)

```
while il existe un sommet v non colorié dans G do
    Colorier v avec la plus petite couleur non utilisée par ses voisins déjà coloriés
end while
```

Question 4 Quel est le nombre maximum de couleurs qui peuvent être utilisées avec cet algorithme ? Expliquez.

Pour les questions suivantes (5 et 6), supposons que $|V| = n$ et que $d(1) \geq d(2) \geq \cdots d(n)$.

Question 5 En considérant une exécution de l'algorithme 1 sur les sommets pris dans l'ordre décroissant sur les degrés, montrez qu'on peut déduire que $\chi(G) \leq 1 + max_{i \in [1,n]} min \{d(i), i-1\}$.

Question 6 Construire un graphe G pour lequel $\chi(G) = 1 + max_{i \in [1,n]} min \{d(i), i-1\}$ et $\chi(G) < \Delta(G) + 1$.

Dans un *graphe d'intervalle*, un sommet représente un intervalle de la droite réelle et une arête relie deux sommets lorsque les intervalles associés s'intersectent.

Question 7 Dessinez le graphe d'intervalle associé aux intervalles donnés dans la figure 2.

Question 8 Montrez que pour un graphe d'intervalle G, $\chi(G) = \omega(G)$.

Figure 1 – Un graphe

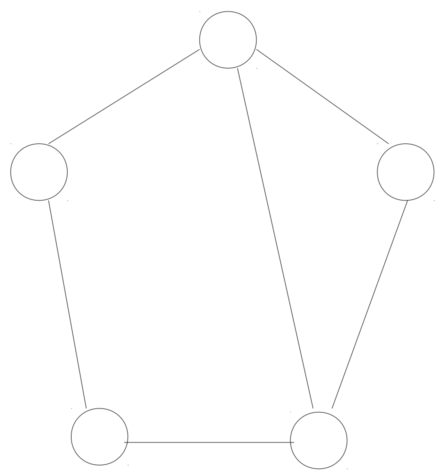
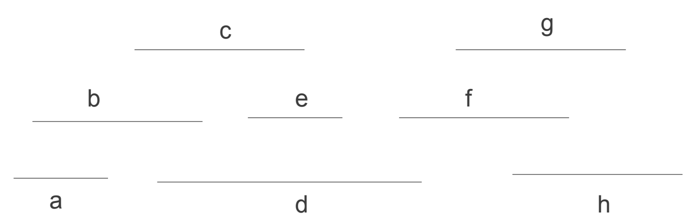


Figure 2 – Intervalles



Partie II

Dans cette partie, vous allez montrer que si G est un graphe connexe qui n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Question 9 Que peut-on dire si $\Delta(G) \leq 2$?

On supposera par la suite que $\Delta(G)(= \Delta) \geq 3$. Il est possible de faire une preuve par l'absurde. Supposons que le résultat n'est pas vrai : il existe un graphe G avec $\Delta \geq 3$ tel que G n'est pas Δ-coloriable.

Considérons un sommet v de G tel que $d(v) = \Delta$ et notons $H = G - \{v\}$.

Question 10 Montrez que tout Δ-coloriage correct de H utilise toutes les couleurs $1, \cdots, \Delta$ sur les sommets voisins de v dans G.

Etant donné un Δ-coloriage correct de H, on note v_i le voisin de v coloré i $(1 \leq i \leq \Delta)$. Pour tout $i \neq j$, on note $H_{i,j}$ le sous-graphe de H induit par tous les sommets colorés i ou j.

Question 11 Montrez que pour tout $i \neq j$, les sommets v_i et v_j sont dans la même composante connexe $C_{i,j}$ de $H_{i,j}$.

Question 12 Montrez que si $C_{i,j}$ est la composante connexe de $H_{i,j}$ contenant v_i et v_j, alors $C_{i,j}$ est un chemin dans $H_{i,j}$.

Question 13 Montrez que, pour des entiers i, j, k distincts, les chemins $C_{i,j}$ et $C_{i,k}$ ne se rencontrent qu'en v_i.

Question 14 Montrez que si G est un graphe connexe qui n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.