Tas de sable

Définitions & notations. Un *multi-graphe fini orienté* est défini comme un graphe fini orienté usuel à cette différence près qu'il peut exister plusieurs arcs d'un sommet à un autre. Formellement, il s'agit d'un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini de *sommets* et $A : S \times S \to \mathbb{N}$ est une application telle que $A(i, j)$ soit égal au nombre d'arcs allant de i vers j. Dans tout ce qui suit, on suppose que $A(i, i) = 0$ pour tout i. On supposera également systématiquement que les multi-graphes sont *fortement connexes*, c'est-à-dire que pour tous sommets $s, t \in S$ il existe une suite $s_0, \cdots, s_k$ de sommets tels que $s_0 = s$, $s_k = t$ et pour tout $0 \leq i \leq k-1$ on a $A(s_i, s_{i+1}) \geq 1$.

Soit $G = (S, A)$ un multi-graphe fini orienté fortement connexe. Pour tout sommet $i \in S$, on note $d_i = \sum_j A(i, j)$ (degré sortant de i). On distingue l'un des sommets, que l'on note 0 et que l'on appelle le *puits*. Une *configuration (de grains de sable)* est un vecteur $u \in \mathbb{N}^S$ tel que $u_0 = 0$ (si $i \neq 0$, u_i est interprété comme le nombre de grains de sables sur le sommet i). Un *tas de sable* est un couple (G, u), où u est une configuration. La configuration u d'un tas de sable évolue vers une configuration v selon la règle dite d'*éboulement* : pour tout $i \neq 0$, si $u_i \geq d_i$, il peut se produire un éboulement en i, et on obtient la configuration v définie par

$$v_0 = 0, \qquad v_i = u_i - d_i, \qquad \text{et } \forall j \notin \{i, 0\},\ v_j = u_j + A(i, j)\ .$$

Ainsi, l'on remarque que le puits «absorbe» tous les grains qu'il reçoit. On remarquera ici qu'à chaque étape on ne fait ébouler qu'un seul sommet. On note $u \longrightarrow v$ ou encore $u \xrightarrow{i} v$ pour insister sur le sommet en lequel a eu lieu l'éboulement. La clôture transitive de la relation $\longrightarrow$ est notée $\xrightarrow{*}$, c'est à dire que l'on note $u \xrightarrow{*} v$ lorsqu'il existe $k \geq 1$ et des sommets $u_0, \ldots, u_k$ tels que $u_0 = u$, $u_k = v$ et pour tout $0 \leq i < k$, on a $u_i \longrightarrow u_{i+1}$. Si $(u = u_0) \xrightarrow{i_1} u_1 \cdots u_{k-1} \xrightarrow{i_k} (u_k = v)$, on dit que $i_1 \cdots i_k$ est un *mot d'éboulement* associé à la transformation de u en v.

Question 1. Soit u une configuration dans laquelle un éboulement peut se produire en deux sommets distincts i et j. Montrer qu'il existe des configurations v, w, x telles que : $u \xrightarrow{i} v \xrightarrow{j} x$ et $u \xrightarrow{j} w \xrightarrow{i} x$.

Question 2. Montrer qu'il n'existe pas de suite d'éboulements infinie. On pourra raisonner par l'absurde et partitionner l'ensemble des sommets S en deux sous-ensembles T et U où T est l'ensemble des sommets qui s'éboulent infiniment souvent au cours de l'éboulement, et U l'ensemble de ceux qui s'éboulent un nombre fini de fois.

Une configuration dans laquelle aucun éboulement n'est possible est dite *stable*.

Question 3. Soit une configuration u.

(a) Montrer qu'il existe une unique configuration stable v telle que $u \xrightarrow{*} v$.

(b) Montrer que si σ et σ' sont deux mots d'éboulement associés à $u \xrightarrow{*} v$, alors $\forall i,\ |\sigma|_i = |\sigma'|_i$ (où $|\sigma|_i$ désigne le nombre d'occurrences de i dans le mot σ).

Question 4. Proposer un algorithme prenant en entrée une configuration et retournant en sortie la configuration stable associée.

Une configuration stable u est *récurrente* s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^S \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ avec $\alpha_0 = 0$ et tel que $u + \alpha \xrightarrow{*} u$ (où l'on définit, pour tout $i \in S$, $(u + \alpha)_i$ comme valant $u_i + \alpha_i$).

Question 5. Montrer qu'il existe des configurations stables qui ne sont pas récurrentes.

Question 6.

(a) Donner une caractérisation simple de l'ensemble des configurations stables.

(b) Proposer un algorithme prenant en entrée le graphe G et retournant en sortie l'ensemble des configurations stables récurrentes.

Correction

Question 1. Soit u une configuration dans laquelle i et j peuvent s'ébouler. En particulier, on a $u_i \geq d_i,\ u_j \geq d_j$. Soit $u \xrightarrow{i} v$ et $u \xrightarrow{j} w$. On a $v_j \geq u_j \geq d_j$ donc j peut s'ébouler en v. De même i peut s'ébouler en w. Soit $u \xrightarrow{i} v \xrightarrow{j} x$ et $u \xrightarrow{j} w \xrightarrow{i} y$. On a :

$$\forall k \neq i, j, 0, \quad x_k = u_k + A(i,k) + A(j,k), \quad y_k = u_k + A(j,k) + A(i,k)\ .$$

De même on vérifie que $x_i = y_i$ et $x_j = y_j$. On a donc bien $x = y$.

Question 2. Supposons qu'il existe un éboulement infini. On partitionne l'ensemble des sommets S en deux sous-ensembles T et U où T est l'ensemble des sommets qui s'éboulent infiniment souvent au cours de l'éboulement, et U l'ensemble de ceux qui ne s'éboulent qu'un nombre fini de fois. L'ensemble T est non-vide puisque l'éboulement considéré est infini. L'ensemble U est non-vide puisqu'il contient 0. Considérons l'éboulement infini à partir de l'instant où tous les sommets de U ont cessé d'être éboulés. Soit N le nombre total de grains de sable sur les sommets de T. Cette quantité est décroissante puisque les sommets de $S \setminus T$ ne s'éboulent jamais. Par ailleurs, comme le graphe G est fortement connexe, il existe $t \in T, u \in U$, tels que $A(t,u) > 0$. à chaque éboulement du sommet t, la quantité N décroit strictement. Comme N est minoré par 0, on en déduit que t ne peut s'ébouler qu'un nombre fini de fois. Contradiction.

Question 3. L'existence est une conséquence immédiate de la question précédente.

Supposons que l'on a $u \xrightarrow{*} v$ et $u \xrightarrow{*} w$ avec $v \neq w$. Posons

$$E = \left\{(\sigma, \tau) \in (S-0)^* \times (S-0)^* \mid u \xrightarrow{\sigma} v,\ u \xrightarrow{\tau} w\right\}\ .$$

La taille des mots d'éboulement menant à v (ou à w) est bornée. En effet s'il existait des mots d'éboulement arbitrairement grands, on pourrait par extractions successives construire un éboulement infini, contredisant la Question 2. Donc E est fini. On choisit $(\sigma, \tau) \in E$ de façon à maximiser la longueur du plus long préfixe commun entre σ et τ. Soit x le plus long préfixe commun entre σ et τ. On a

$$u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{i} \xrightarrow{\sigma_1} v, \qquad u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{j} \xrightarrow{\tau_1} w\ ,$$

avec $i \neq j,\ xi\sigma_1 = \sigma,\ xj\tau_1 = \tau$. Le sommet j est éboulable en u'. On en déduit que $|i\sigma_1|_j > 0$, sinon j serait éboulable en v (cf. Question 1) contredisant que v est stable. De même, on a $|j\tau_1|_i > 0$. On a donc

$$u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{i} \xrightarrow{\sigma_0} \xrightarrow{j} \longrightarrow v, \qquad u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{j} \xrightarrow{\tau_0} \xrightarrow{i} \longrightarrow w\ .$$

On en déduit que l'on a (même argument qu'en Question 1) :

$$u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{i} \xrightarrow{j} u'' \xrightarrow{\sigma_0} \longrightarrow v, \qquad u \xrightarrow{x} u' \xrightarrow{j} \xrightarrow{i} u'' \xrightarrow{\tau_0} \longrightarrow w\ .$$

Ceci contredit que (σ, τ) ait été choisi avec le plus long préfixe commun possible. On en déduit qu'il existe un unique état stable atteignable depuis u.

La suite d'arguments ci-dessus montre également que deux mots d'éboulement menant à l'état stable ont la même image commutative.

Question 4. On utilise la question précédente. Il suffit, à chaque étape, de tester les sommets les uns après les autres, dès qu'on en trouve un qui est éboulable, on effectue l'éboulement. Lorsqu'aucun sommet n'est éboulable, on arrête l'algorithme et on sort la configuration obtenue.

Notons $s^\bullet$ l'ensemble des successeurs directs du sommet s.

Entrée : $G = (S, A)$, $u \in \mathbb{N}^S$.
$v \leftarrow u$, $\textsc{Eboule} \leftarrow \emptyset$
Pour tout $s \in S - \{0\}$,
if $v_s \geq d_s$ **then**
  $\textsc{Eboule} \leftarrow \textsc{Eboule} \cup \{s\}$
end if
while $\textsc{Eboule} \neq \emptyset$ **do**
  Choisir $s \in \textsc{Eboule}$, $\textsc{Eboule} \leftarrow \textsc{Eboule} - \{s\}$,
  $v_s \leftarrow v_s - d_s$, pour tout $i \in S - \{0, s\},\ v_i \leftarrow v_i + A(s, i)$,
  Pour tout $t \in \{s\} \cup s^\bullet$,
  if $(t \notin \textsc{Eboule}) \wedge (v_t \geq d_t)$ **then**
    $\textsc{Eboule} \leftarrow \textsc{Eboule} \cup \{t\}$
  end if
end while
Sortie : v.

Question 5.

Indication. *On donnera le graphe*

Considérons le graphe $G = (S = \{0, 1, 2\}, A)$ avec $A(1, 2) = A(2, 1) = A(1, 0) = A(2, 0) = 1$. La configuration $(0, 0, 0)$ est stable. Supposons qu'elle soit récurrente : il existe alors $\alpha \in \mathbb{N}^S \setminus \{(0, 0, 0)\}, \alpha_0 = 0$ tel que $u + \alpha \xrightarrow{*} u$. Soit v la configuration correspondant à l'avant-dernière étape dans le chemin menant de $(u + \alpha)$ à u. Si on a $v \xrightarrow{1} u$ alors $v = (0, 2, -1)$ ce qui est impossible puisque $v \in \mathbb{N}^S$. Si on a $v \xrightarrow{2} u$ alors $v = (0, -1, 2)$ ce qui est impossible également. On en conclut que $(0, 0, 0)$ n'est pas récurrente.

Question 6.

Indication. *La première partie de la question est simple. Pour la seconde partie définir* $\textsc{Rec}$ *et* $\textsc{St}$ *comme dans la solution.*

L'ensemble des configurations stables est caractérisé par :

$$u \text{ stable} \iff \forall i \neq 0,\ u_i < d_i\ .$$

Pour $s \in S - \{0\}$, on pose $\delta_s \in \mathbb{N}^S,\ (\delta_s)_s = 1,\ \forall t \neq s,\ (\delta_s)_t = 0$. Soit $\textsc{St}$ l'ensemble des configurations stables. Considérons le graphe orienté de sommets $\textsc{St}$, avec les arcs

$$u \longrightarrow v \iff \exists s \in S - \{0\},\ u + \delta_s \xrightarrow{*} v\ .$$

Soit $\textsc{Rec}$ l'ensemble des configurations de $\textsc{St}$ qui appartiennent à un circuit de $(\textsc{St}, \to)$. On va montrer que $\textsc{Rec}$ est l'ensemble des configurations récurrentes.

Soit $v \in \textsc{Rec}$. Par définition, il existe $v_1, \ldots, v_{k-1}$ et $s_0, \ldots, s_{k-1}$ tels que

$$v + \delta_{s_0} \xrightarrow{*} v_1, \quad v_1 + \delta_{s_1} \xrightarrow{*} v_2, \quad \ldots \quad , v_{k-1} + \delta_{s_{k-1}} \xrightarrow{*} v\ .$$

Par application de la Question 3, on en déduit que

$$v + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{s_i} \xrightarrow{*} v \ .$$

Donc v est une configuration stable récurrente.

Réciproquement, soit v une configuration récurrente. Alors, on a par définition qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^S - \{(0, \ldots, 0)\}$, avec $\alpha_0 = 0$ et tel que $v + \alpha \xrightarrow{*} v$. Soient $s_0, \ldots, s_{n-1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{s_i} = \alpha$. Soient $v_1, \ldots, v_n$ stables, tels que

$$v + \delta_{s_0} \xrightarrow{*} v_1, \quad v_1 + \delta_{s_1} \xrightarrow{*} v_2, \quad \ldots \quad , v_{n-1} + \delta_{s_{n-1}} \xrightarrow{*} v_n \ .$$

Quitte à choisir les éboulements dans l'ordre $s_0, \ldots, s_{n-1}$, on obtient $v + \alpha \xrightarrow{*} v_n$ avec v_n stable. Par application de la Question 3, on en déduit que $v_n = v$. Donc $(v, v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ est un circuit de $(\textsc{St}, \rightarrow)$ et $v \in \textsc{Rec}$.

Pour obtenir l'algorithme demandé, il suffit donc de construire $(\textsc{St}, \rightarrow)$ et de déterminer l'ensemble des sommets appartenant à un circuit.