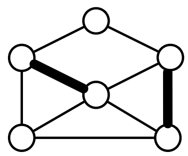
Couplage dans un graphe

Un *graphe* G est un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets (cercles) et E est un ensemble d'arêtes (trait entre deux cercles). Remarquons que $E \subseteq V \times V$. Nous noterons par $\{u_1, u_2\}$ l'arête dont les extrémités sont u_1 et u_2.

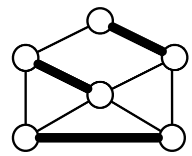
Soit un graphe $G = (V, E)$. Un *couplage* M est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes : $\forall \{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\} \in M$, $\{u_1, u_2\} \neq \{v_1, v_2\} \Rightarrow \{u_1, u_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$

Un couplage *maximal* est un couplage M ayant la propriété que si une arête e est ajoutée, alors $M \cup \{e\}$ n'est pas un couplage.

Un couplage *maximum* est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes.



Couplage maximal

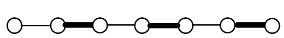


Couplage maximum

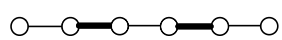
Figure 1 – Exemple de couplages : l'ensemble des arêtes épaisses forment le couplage.

Notation : Soit M un couplage.

— Nous noterons le nombre d'arêtes du couplage M par $|M|$.
— Un sommet v est dit *couvert* par M s'il est incident à une arête de M.
— Un chemin dans le graphe est dit M-*alternant* si ses arêtes sont alternativement dans M et hors de M (donc une arête sur deux est dans M).
— Un chemin M-*augmentant* est un chemin alternant dont les points de départ et d'arrivée sont deux sommets non couverts par M.



Ce chemin est M-alternant.



Ce chemin est M-augmentant de 5 arêtes.

Figure 2 – Exemple de différents types de chemins : l'ensemble des arêtes épaisses forment le couplage M.

Question 1 Considérons l'algorithme glouton :
Entrée : un graphe $G = (V, E)$
Sortie : un couplage M

1. $M \leftarrow \emptyset$;
2. Pour chaque arête e du graphe G
   Si $M \cup \{e\}$ est un couplage alors $M \leftarrow M \cup \{e\}$;
3. Retourner M ;

Donner la complexité de cet algorithme.

Correction

Instruction 1 : $O(1)$ opérations

Instruction 2 : $O(nm)$ opérations si on l'implémente de façon brute de force : on teste pour toutes les arêtes de M , si elles ont une extrémité en commun avec e. Le nombre d'arêtes de M est majoré par $\frac{n}{2}$.

□

Question 2 Montrer que le couplage M retourné par l'algorithmique glouton est maximal.

Correction

Supposons qu'il existe une arête e tel que $M \cup \{e\}$ soit aussi un couplage ; Lors d'un traitement de e par l'algorithme, e n'est pas inséré dans le couplage courant M' car $M' \cup \{e\}$ n'est pas un couplage. Comme $M' \subseteq M$, $M \cup \{e\}$ n'est pas aussi un couplage. D'où la contradiction. □

Question 3 Montrer que le couplage M retourné par l'algorithmique glouton satisfait la condition : $|M^*| \leq 2|M|$ avec M^* correspondant à un couplage maximum. *Indication : il faudra considérer séparément les arêtes de $M \backslash M^*$ et les arêtes de $M \cap M^*$.*

Correction

Soit $e = (u, v)$ une arête de M n'étant pas dans M^*. Au plus deux arêtes e_1, e_2 sont incidentes à u et v dans M^*.

1. chaque arête $e \in M \backslash M^*$ peut être associé à au moins 2 arêtes $\in M^* \backslash M$. Donc,

$$\sum_{e \in M^* \backslash M} 1 \leq 2 \sum_{e \in M \backslash M^*} 1$$

2. chaque arête $e \in M \cap M^*$ peut être associé à une seule arête $\in M^* \cap M$. Donc,

$$|M| = \sum_{e \in M \backslash M^*} 1 + \sum_{e \in M \cap M^*} 1$$

□

Question 4 Donner un graphe dans lequel le couplage M retourné par l'algorithmique glouton satisfait la condition : $|M|^* = 2|M|$.

Correction

Un chemin avec 4 sommets, par exemple. □

Question 5 Montrer que si le graphe possède un chemin M-augmentant, alors M n'est pas maximum.

Correction

Soit P le chemin M-augmentant. Il suffit de considérer l'ensemble d'arêtes M' suivant : $M' = (M \backslash P) \cup (P \backslash M)$. Comme P est un chemin M-augmentant, toutes les arêtes de P n'ont pas d'extrémité commune avec l'ensemble d'arêtes $(M \backslash P)$ et $(P \backslash M)$ est un couplage. Donc M' est aussi un couplage.

Comme P est un chemin M-augmentant, $P \backslash M$ possède une arête de plus que $P \cap M$. Donc $|M'| = |M| + 1$ et le nombre d'arêtes de M' est supérieur à celui de M. Ceci permet de conclure que M n'est pas maximum.

$\square$

Question 6 Soit M un couplage tel que chaque chemin M-augmentant possède au moins $2k - 1 > 1$ arêtes. Montrer que $k|M| \geq (k-1)|M^*|$ avec M^* correspondant à un couplage maximum. *Indication : Il faut raisonner sur le graphe $G^m = (V, M \cup M^*)$, c'est-à-dire le sous graphe de G^m ayant comme arêtes uniquement les arêtes des deux couplages M^* et M.*

Correction

Considérons G^m et ses composantes connexes. Tout sommet a un degré au plus égal à 2 (une arête issue de M et une autre issue de M^*). Donc les composantes connexes sont des chemins ou des cycles. Soit C une composante connexe de G^m.

— Si C contient une arête e dans $M \cap M^*$, alors C est composé uniquement de cette arête. Donc,
$$|\{e \in C \cap M\}| = |\{e \in C \cap M^*\}|$$

— Si C est un cycle dans G^m, alors C est un cycle d'un nombre pair d'arêtes. Donc,
$$|\{e \in C \cap M\}| = |\{e \in C \cap M^*\}|$$

— Si C est un chemin dans G^m, alors C est composé d'un chemin dans le graphe dont les arêtes sont alternativement dans M et de M^* (donc si une arête sur deux est dans M). Nous allons considérer plusieurs cas :
  — Les deux arêtes extrémités sont dans M : impossible. C'est en contradiction avec le fait que M^* soit maximum.
  — Les deux arêtes extrémités sont dans M^*. Alors C est un chemin M-augmentant. Par hypothèse, ce chemin possède plus de $2k - 1 > 1$ arêtes. Donc,
  $$|\{e \in C \cap M\}| + 1 = |\{e \in C \cap M^*\}|$$
  Comme C contient au plus $k - 1$ arêtes de M, nous avons
  $$|\{e \in C \cap M\}|k \geq (k-1)|\{e \in C \cap M^*\}|$$
  — Un seul extrémité est dans M et l'autre dans M^*. Alors C est un chemin M-alternant sans être augmentant. Donc,
  $$|\{e \in C \cap M\}| = |\{e \in C \cap M^*\}|$$

$\square$

Question 7 Décrire un algorithme qui étant donné en entrée un graphe G, retourne un couplage M tel que $|M| \geq \frac{2}{3}|M^*|$. La complexité de cet algorithme doit être en au plus

$O(nm)$ opérations.

Correction

Il suffit de modifier le couplage maximal en considérant qu'il n'existe aucun chemin M-augmentant de longueur 3.

$\square$

Question 8 Maintenant, nous allons considérer un graphe pondéré, c'est-à-dire un graphe $G = (V, E)$ avec la fonction poids sur les arêtes $w : E \to \mathbb{N}$. Le poids d'un couplage M noté par $w(M)$ est la somme des poids de toutes les arêtes : $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$. Nous notons le couplage M^* tel que $w(M^*) = max\{w(M) : M \text{ est un couplage}\}$.

Transformer l'algorithme de la question 1 qui étant donné en entré un graphe G, retourne un couplage M tel que $2w(M) \geq w(M^*)$. Donner la complexité de cet algorithme.

Correction

Considérons l'algorithme suivant :

Entrée : un graphe $G = (V, E)$

Sortie : un couplage M

1. Trier les arêtes par poids décroissant ;
2. $M \leftarrow \emptyset$;
3. Pour chaque arête e du graphe G (en les considérant dans l'ordre de poids décroissant)
   Si $M \cup \{e\}$ est un couplage alors $M \leftarrow M \cup \{e\}$;
4. retourner M ;

Comme l'instruction 1 se réalise en $O(m \log m)$ opérations, la complexité de l'algorithme est $O(nm)$.

Maintenant, nous allons prouver que $2w(M) \geq w(M^*)$.

Considérons $e = (u, v)$ une arête du couplage M (retourné par notre algorithme). Nous allons faire une étude de cas :

— Si $e \in M^*$, alors $w(e) \geq \frac{w(e)}{2}$.

— Si $e \notin M^*$, alors il existe au moins une arête de M^* qui a une extrémité de e car M est un couplage maximal (voir question 2). Donc le fait que l'algorithme choisisse e dans M a permis d'exclure au plus deux arêtes de M^*, l'une incidente à u, et/ou l'autre incidente à v.
Soit e une arête du couplage M retourné par l'algorithme.
Notons $\mathcal{P}(e)$ l'ensemble d'arêtes qui ont été exclues par le fait que l'algorithme avait inséré e dans le couplage M : $\mathcal{P}(e)$ est l'ensemble d'arêtes e' considérées après e (dans l'ordre de poids décroissant) tel que $M \cup \{e'\}$ n'est pas un couplage. Supposons que le fait que l'algorithme choisisse e dans M a permis d'exclure e'. alors cela signifie que $w(e) \geq w(e')$. En raisonnant par contradiction, si $w(e') > w(e)$, alors, cela signifie que l'arête e' serait considéré avant l'arête e et e' serait dans M. A ce stade de l'algorithme, aucune arête de M a une extrémité incidente à e' et l'algorithme insérait e' dans M. Ceci mène à une contradiction. Remarquons

que :

— Si choisir e a permis d'exclure une arête e' de M^*, Donc $w(e) \geq \frac{w(e')}{2}$.

— Si choisir e a permis d'exclure deux arêtes e' et e'' de M^*, alors $w(e) \geq w(e')$ et $w(e) \geq w(e'')$. Donc on peut conclure $w(e) \geq \frac{w(e')+w(e'')}{2}$.

Donc, on a $w(e) \geq \frac{1}{2}w(\mathcal{P}(e))$.

De plus, comme M est maximal, toutes les arêtes e' dans $M^*\backslash M$ ont été exclues par une arête de M. On peut conclure que $M^*\backslash M = \bigcup\limits_{e\in M\backslash M^*} \mathcal{P}(e)$.

En combinant tous les résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} w(M) = & \sum_{e\in M^*\cap M} w(e) + \sum_{e\in M\backslash M^*} w(e) \\ \geq & \frac{1}{2}\sum_{e\in M^*\cap M} w(e) + \sum_{e\in M\backslash M^*} \frac{1}{2} w(\mathcal{P}(e)) \\ \geq & \frac{1}{2} w(M^*) \end{aligned}$$

□