Problème de flots

Définitions et notations

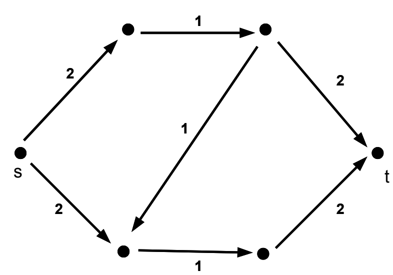
Un *réseau* est un graphe orienté $G = (V, E)$ avec une *capacité* positive $c(e)$ sur chaque arc $e \in E$ et 2 sommets particuliers, le *sommet source* s et le *sommet puits* t. Aucun arc n'arrive à la source et aucun arc ne quitte le puits. Les sommets du réseau sont aussi appelés *nœuds*. Un *flot* f attribue une valeur $f(e)$ à chaque arc e du réseau. Si v est un nœud du réseau, on note $f^+(v)$ le flot total sur les arcs sortants de v et $f^-(v)$ le flot total sur les arcs entrants de v. Un flot f est *réalisable* s'il satisfait les contraintes de capacité des arcs (pour tout arc e, $0 \leq f(e) \leq c(e)$) et les contraintes de conservation des nœuds (pour tout nœud $v \notin \{s, t\}$, $f^+(v) = f^-(v)$).

La *valeur* d'un flot f est $f^-(t)$ et est notée $val(f)$. Un *flot maximum* est un flot réalisable de valeur maximum.

Question 1 Le *flot zéro* attribue la valeur 0 à chaque arc. Est-ce que ce flot est réalisable quel que soit le réseau ?

Question 2 Donnez 2 flots réalisables différents (et autre que le flot zéro) sur le réseau donné dans la figure 1. Les valeurs sur les arcs correspondent aux capacités.

FIGURE 1 – Exemple de réseau.



Pour la définition suivante, on s'autorise à traverser les arcs dans le sens inverse de leur orientation. On parlera alors de direction inverse.
Soit f un flot réalisable dans un réseau R. Un *chemin f-améliorant* est un chemin P de la source vers le puits dans le graphe associé au réseau R qui attribue une valeur $\epsilon(e)$ à chaque arc e du réseau :

- $\epsilon(e) = c(e) - f(e)$ si l'arc e est dans le sens de son orientation initiale dans P.
- $\epsilon(e) = f(e)$ si l'arc e est dans la direction inverse dans P.

La *tolérance* de P est notée $min_{e \in P}\epsilon(e)$.

Question 3 Montrez que la tolérance d'un chemin f-améliorant est positive.

Question 4 Montrez que si P est un chemin f-améliorant avec une tolérance z, alors modifier le flot f en ajoutant z sur les arcs étant dans leur orientation initiale dans P et en soustrayant z sur les arcs étant dans la direction inverse dans P, donne un flot f' réalisable avec $val(f') = val(f) + z$.

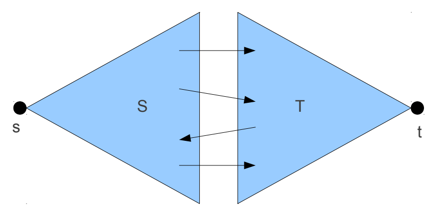
Question 5 Si U est un ensemble de nœuds du réseau, alors on note $f^+(U)$ le flot total sur les arcs sortants de U et $f^-(U)$ le flot total sur les arcs entrants de U. On appelle $f^+(U) - f^-(U)$ le *flot net* de U. Montrez que $f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in U} [f^+(v) - f^-(v)]$.

Dans un réseau une *coupe* $[S, T]$ correspond aux arcs entre l'ensemble S et l'ensemble T où S et T partitionnent l'ensemble des nœuds du réseau et $s \in S$ et $t \in T$. La figure 2 donne l'exemple d'une telle coupe.

Question 6 Si f est un flot réalisable et $[S, T]$ une coupe, montrer que le flot net de S est l'opposé du flot net de T et vaut $val(f)$.

Question 7 On note $cap(S, T)$ la somme des capacités des arcs de la coupe $[S, T]$. Montrez que si f est un flot réalisable, alors $val(f) \leq cap(S, T)$. Que pouvez-vous en conclure sur la valeur d'un flot maximal ?

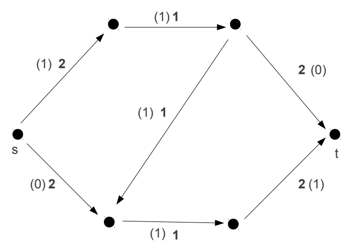
Figure 2 – Exemple de coupe.

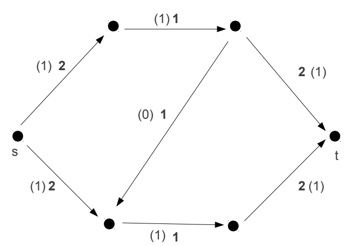


Problème de flots
Correction

Question 1 Oui car le flot zéro vérifie les contraintes de capacité et les contraintes de conservation des nœuds quel que soit le réseau.

Question 2 Les figures ci-dessous donnent 2 flots réalisables (valeurs entre parenthèses).





Question 3 Pour chaque arc e, $\epsilon(e)$ est soit égal à $f(e)$ qui est positif par définition du flot, soit égal à $c(e) - f(e)$ qui est aussi positif car, comme f est un flot réalisable, $f(e) \leq c(e)$.

Question 4 Par définition de la tolérance, on a $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ pour tout arc e. Les contraintes de capacité sont donc vérifiées pour le flot f'. Il faut maintenant regarder si les contraintes de conservation des nœuds sont vérifiées avec le flot f'. Pour cela, il suffit seulement de regarder les nœuds appartenant au chemin P car les autres nœuds ne sont pas reliés à des arcs dont les valeurs ont été modifiées.

Soit v un nœud appartenant au chemin P. Il y a quatre cas possibles :

— Les 2 arcs adjacents à v modifiés sont dans le sens de leur orientation initiale (un arc entrant et un arc sortant). Comme les modifications sont identiques (2 fois $+z$) et qu'on avait $f^+(v) = f^-(v)$, on a toujours $f'^+(v) = f'^-(v)$.

— Un arc modifié est entrant à v dans le sens de son orientation initiale tandis que l'autre arc modifié est dans le sens inverse. Cela correspond donc à 2 arcs entrants à v dont un a sa valeur augmentée de $+z$ tandis que l'autre a sa valeur diminuée de z. On a donc toujours $f'^+(v) = f'^-(v)$.

— Les 2 arcs modifiés sont sortants à v. Dans ce cas, un des arcs est dans le sens inverse et a sa valeur diminuée de z tandis que l'autre est dans le sens de son orientation initiale et a sa valeur augmentee de z. On a donc toujours $f'^+(v) = f'^-(v)$.

— Les 2 arcs adjacents à v modifiés sont dans le sens inverse. Ceci correspond à un arc entrant et un arc sortant. Comme les modifications sont identiques (2 fois $-z$) et qu'on avait $f^+(v) = f^-(v)$, on a toujours $f'^+(v) = f'^-(v)$.

Un des arcs adjacents à t est modifié. C'est forcément un arc entrant (car t n'a pas d'arc sortant) et il est donc forcément modifié dans le sens de son orientation initiale. Par conséquent $val(f') = val(f) + z$. Le flot f' a donc une valeur supérieure à celle du flot f.

Question 5 Considérons un arc $e = (x, y)$. Si x et y appartiennent à U, $f(e)$ n'est pas compté dans $f^+(U) - f^-(U)$. $f(e)$ est compté dans $f^+(x)$ et $f^-(y)$, mais est annulé dans $\sum_{v \in U}[f^+(v) - f^-(v)]$. Si x et y n'appartiennent pas à U, alors $f(e)$ n'est pas compté dans $f^+(U) - f^-(U)$ et dans $\sum_{v \in U}[f^+(v) - f^-(v)]$. Si x n'appartient pas à U alors que y appartient à U, alors $f(e)$ est compté dans $f^-(U)$ et dans $f^-(y)$. Par conséquent $f(e)$ contribue négativement dans les 2 sommes. Enfin si x appartient à U tandis que y n'appartient pas à U, alors $f(e)$ est compté dans $f^+(U)$ et dans $f^+(x)$. Par conséquent, $f(e)$ contibue positivement dans les 2 sommes. Sommer tous les arcs adjacents aux nœuds de U donne bien l'égalité.

Question 6 Par définition sur la coupe, $f^+(S) - f^-(S) = f^-(T) - f^+(T)$ (les arcs sortants de S entrent dans T et vice versa). De plus $f^+(S) - f^-(S) = \sum_{v \in S}[f^+(v) - f^-(v)] = f^+(s)$ car f est un flot réalisable. De même $f^+(T) - f^-(T) = \sum_{v \in T}[f^+(v) - f^-(v)] = -f^-(t) = -val(f)$. Donc le flot net de S est égal à $val(f)$.

Question 7 D'après la question précédente, on sait que $val(f) = f^+(S) - f^-(S)$. Donc $val(f) \leq f^+(S)$. Or comme f est un flot réalisable, on sait aussi que tous les arcs sortants de S vérifient la contrainte de capacité. Donc $f^+(S) \leq cap(S, T)$. Donc $val(f) \leq cap(S, T)$.

Parmi toutes les coupes possibles, une coupe avec la capacité minimum donne la meilleure borne sur la valeur d'un flot.