Correction

Je note $<_G$ la relation globale lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'entrée de l'algorithme. Pour les questions 1 et 2, $I = \{1, 2, 3\}$.

Question 1. Supposons que $P = \{p_1, p_2\}$ et $p_2 <_1 p_1, p_2 <_2 p_1, p_1 <_3 p_2$.

Alors $n(p_1) = (2, 1)$ et $n(p_2) = (1, 2)$ et on a donc $p_2 <_G p_1$.

Supposons maintenant que $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ et $p_2 <_1 p_1 <_1 p_3$, $p_2 <_2 p_1 <_2 p_3$ et $p_3 <_3 p_1 <_3 p_2$.

Alors $n(p_1) = (0, 3, 0)$, $n(p_2) = (1, 0, 2)$ et $n(p_3) = (2, 0, 1)$ et on a donc $p_1 <_G p_2$, ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance.

Question 2.

Indication. *Montrer que l'algorithme viole la règle d'indépendance.*

Supposons que $P = \{p_1, p_2\}$ et $p_2 <_1 p_1, p_2 <_2 p_1, p_1 <_3 p_2$.

On a $m(p_1) = 4$ et $m(p_2) = 5$ et donc $p_2 <_G p_1$.

Supposons maintenant que $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ et $p_4 <_1 p_3 <_1 p_2 <_1 p_1, p_4 <_2 p_3 <_2 p_2 <_2 p_1$ et $p_1 <_3 p_4 <_3 p_3 <_3 p_2$.

On a $m(p_1) = 6$, $m(p_2) = 5$, $m(p_3) = 8$ et $m(p_4) = 11$ et donc $p_4 <_G < p_3 < Gp_1 <_G p_2$ ce qui contredit l'hypothèse d'indépendance.

Question 3. Par la règle d'unanimité, I décide tout couple (x, y).

Question 4.

(a)

Indication. *Considérons les choix suivants.* $\forall i \in J\ x <_i y <_i z$ *et* $\forall i \notin J\ y <_i z <_i x$.

Puisque J décide (x, y), $x <_G y$. Par la règle d'unanimité, $y <_G z$. Par transitivité, $x <_G z$. Donc J décide (x, z).

(b) Considérons les choix suivants. $\forall i \in J\ z <_i x <_i y$ et $\forall i \notin J\ y <_i z <_i x$. Puisque J décide (x, y), $x <_G y$. Par la règle d'unanimité, $z <_G x$. Par transitivité, $z <_G y$. Donc J décide (z, y).

(c) On en déduit que J est décisif pour tous les couples. Les seuls cas qui ne sont pas traités par les questions précédentes sont (z, x), (y, z) et (y, x).
Pour (z, x) on sait que J décide (x, y) donc aussi (z, y) et donc aussi (z, x). Même type de raisonnement pour (y, z).
Enfin pour (y, x), on sait que J décide (x, y) donc aussi (x, z) donc aussi (y, z) donc aussi (y, x).

Question 5. Supposons que J décide (x, y) et que J n'est pas un singleton. Soit $i \in J$. Considérons la situation suivante avec z un autre projet :

— $x <_i y <_i z$,
— $\forall j \in J \setminus \{i\}\ z <_j x <_j y$,
— $\forall j \notin J\ y <_i z <_i x$.

On a $x <_G y$ puisque J décide (x, y). Si $z <_G y$ alors $J \setminus \{i\}$ décide (z, y) contrairement à l'hypothèse de cardinalité sur J. Donc $y <_G z$ et par conséquent $x <_G z$ ce qui implique que $\{i\}$ décide (x, z) avec de nouveau une contradiction.

Question 6. D'après les questions précédentes il existe un groupe décisif et ce groupe est forcément un singleton : c'est donc un dictateur. Il n'existe donc pas d'algorithme équitable.