Théorème d'Arrow

Considérons un jury, composé de $n \geq 2$ membres notés $I = \{1, \ldots, n\}$, qui classe un sous-ensemble fini de projets $P \subseteq \{p_1, \ldots, p_k, \ldots\}$. Dans un premier temps, chaque membre i établit son classement donné par une relation d'ordre total $<_i$ sur P. Dans un deuxième temps, un algorithme d'interclassement noté $\mathcal{A}$ prend en entrée l'ensemble P et les relations $<_i$ et renvoie un ordre *global* $<_{G(P,\{<_i\})}$ sur P. Cet algorithme est ***équitable*** s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. ***(Unanimité)*** Soient $x, y \in P$, si l'on a pour tout i que $x <_i y$ alors $x <_{G(P,\{<_i\})} y$.
   Si tous les membres sont d'accord pour le classement d'un couple x, y alors l'interclassement reflète cet accord.
2. ***(Absence de dictature)*** Soit j un membre, si $\forall i \neq j,\ \forall x, y \in P\ (x <_j y \Leftrightarrow y <_i x)$ alors $\exists x_0, y_0 \in P$ et $x_0 <_j y_0 \wedge y_0 <_{G(P,\{<_i\})} x_0$.
   Si un membre (le dictateur) a un avis contraire à tous les autres membres pour *tous* les couples de projets alors l'interclassement doit être différent du classement de ce membre.
3. ***(Indépendance)*** Soient $(P, (<_i)_{i\in I}), (P', (<'_i)_{i\in I}))$ tels que pour tout $x, y \in P \cap P'$ et tout i on a $(x <_i y \Leftrightarrow x <'_i y)$, alors $x <_{G(P,\{<_i\})} y \Leftrightarrow x <_{G(P',\{<'_i\})} y$.
   Le choix de l'interclassement pour un couple (x, y) ne dépend que du classement entre (x, y) par chacun des membres.

Notez que le jury est fixé mais que l'ensemble des projets peut varier. On note p le cardinal de P et pour un algorithme donné, $n_i(x)$ le nombre de fois où le projet x est classé en $i$ème position (le projet classé en première position par le juré i étant le plus *grand* dans l'ordre $<_i$).

Question 1. Soit l'algorithme d'interclassement qui procède ainsi. A chaque projet x, on associe le vecteur $n(x) = (n_1(x), \ldots, n_p(x))$ puis on définit $p_\alpha <_{G(P,\{<_i\})} p_\beta$ si et seulement si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

— $\exists k\ n_k(p_\alpha) < n_k(p_\beta) \wedge \forall k' < k\ n_{k'}(p_\alpha) = n_{k'}(p_\beta)$,
— $n(p_\alpha) = n(p_\beta) \wedge \alpha < \beta$.

Montrez que cet algorithme viole la règle d'indépendance et donc qu'il n'est pas équitable. Pour cela on donnera un contre exemple en exhibant deux couples $(P, (<_i)_{i\in I})$ et $(P', (<'_i)_{i\in I})$ pour lesquels la règle est violée.

Question 2. Soit l'algorithme d'interclassement qui procède ainsi. A chaque projet x, on associe la quantité $m(x) = \sum_{k\leq|P|} kn_k(x)$ puis on définit $p_\alpha <_{G(P,\{<_i\})} p_\beta$ si et seulement si l'on est dans l'un des deux cas suivants :

— $m(p_\alpha) > m(p_\beta)$
— $m(p_\alpha) = m(p_\beta) \wedge \alpha < \beta$.

Montrez que cet algorithme n'est pas équitable.

La suite du problème consiste à démontrer qu'il n'existe pas d'algorithme équitable. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que l'on possède un algorithme équitable (que l'on fixe jusqu'à la fin) et on raisonne sur ce dernier.

On dit qu'un groupe $J \subseteq I$ de membres, ***décide*** le couple de projets (x, y) si lorsque $(x <_i y \Leftrightarrow i \in J)$ alors $x <_{G(P,\{<_i\})} y$. D'après l'indépendance, cette définition ne dépend pas des autres projets. On dit qu'un groupe J est ***décisif*** s'il existe un couple (x, y) tel que J décide (x, y).

Question 3. Montrez que tout couple (x, y) admet au moins un groupe qui le décide.

Question 4. Soit J un groupe qui décide (x, y) et $z \notin \{x, y\}$.

(a) Montrer que J décide (x, z). Pour cela on pourra créer une situation particulière relative à x, y et z.

(b) Montrer que J décide (z, y).

(c) Montrer que J décide tous les couples de projets.

Question 5. Soit J un groupe décisif de plus petite cardinalité. Montrer que J est un singleton.

Question 6. Conclure qu'il n'existe pas d'algorithme équitable.