Routage multi-contraint

Notations

Un réseau peut être vu comme un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ avec une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ associant à chaque arc un poids à valeur réelle. Les poids, dans le cas des réseaux de communication, peuvent représenter des métriques comme, par exemple, le temps pour traverser le lien ou le coût du lien. Dans tout le sujet, vous supposerez que le graphe orienté pondéré G ne contient pas de poids négatif.

En pratique, de plus en plus d'applications réseau ont besoin d'être routées sur des chemins qui répondent à plusieurs contraintes à la fois. On parle alors du *routage multi-contraint*. Si m est le nombre de métriques à considérer, les arcs du graphe G sont valués par un vecteur de métriques : $\forall e \in E$, $\vec{w}(e) = (w_1^e, w_2^e, \ldots, w_m^e)$.

Supposons tout d'abord que toutes les métriques sont additives, c'est-à-dire que le poids d'un chemin p pour la métrique i, noté $l_i(p)$, est égal à $\sum_{e \in p} w_i^e$.

Etant donné un vecteur de contraintes $\vec{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_m)$, le problème du calcul d'un chemin multi-contraint (MCP) consiste à trouver un chemin p dit faisable, entre une source et une destination, qui satisfait toutes les contraintes : $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq m, l_i(p) \leq L_i$.

Question 1 Montrer que le problème MCP est NP-complet dès que $m \geq 2$. Pour cela, vous pourrez vous aider du problème PARTITION qui est un problème NP-complet. Le problème PARTITION est le suivant : étant donné un ensemble d'entiers positifs (non nécessairement uniques), est-il possible de partitionner cet ensemble en deux sous-ensembles de telle sorte que la somme des entiers du premier sous-ensemble soit identique à la somme des entiers du deuxième sous-ensemble ?

Si la métrique w_i n'est pas additive mais concave, alors le poids d'un chemin p est le minimum parmi les poids des arcs qui constituent ce chemin : $l_i(p) = \min_{e \in p} w_i^e$. Pour cette métrique, un chemin p est dit faisable si $l_i(p) \geq L_i$.

Question 2 Si certaines des métriques sont concaves et d'autres sont additives, comment peut-on se ramener à un problème de chemin multi-contraint avec seulement des métriques additives ?

Par la suite, seules les métriques additives sont considérées et nous considérons le problème avec 2 métriques : $\forall e \in E$, $\vec{w}(e) = (w_1^e, w_2^e)$ et $\vec{L} = (L_1, L_2)$. Puisque le problème du chemin multi-contraint est NP-complet dès que deux métriques additives sont prises en compte, des heuristiques (avec des temps de calcul réduits - e.g. polynomiaux) ont donc été proposées.

Une heuristique possible est donnée par l'algorithme 1. On suppose que la ligne 2 de l'algorithme trouve, en temps polynomial, un chemin entre s et k, dans le graphe G avec les nouveaux poids w_1, w_2', qui répond aux contraintes L_1 et x, si le chemin existe.

Algorithm 1 MCP$(G = (V, E), w_1, w_2, L_1, L_2, s, k)$

1: Créer une nouvelle fonction de poids $w_2' : E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall u \in E$, $w_2'^u \leftarrow \lceil \frac{w_2^u . x}{L_2} \rceil$ où x est un entier positif.
2: Résoudre MCP$(G = (V, E), w_1, w_2', L_1, x, s, k)$ en temps polynomial.

Question 3 Montrer qu'une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2', L_1, x, s, k)$ doit aussi être une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2, L_1, L_2, s, k)$.

Question 4 Donner un exemple de graphe dans lequel une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2, L_1, L_2, s, k)$ n'est pas une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2', L_1, x, s, k)$.

Question 5 Montrer la proposition suivante : soient p un chemin solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2, L_1, L_2, s, k)$ et l la longueur du chemin (nombre d'arcs qui composent ce chemin). Si $w_2(p) \leq (1 - \frac{l-1}{x}).L_2$, alors p est aussi une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w'_2, L_1, x, s, k)$.

Question 6 Donnez une condition suffisante pour que l'algorithme 1 trouve une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w_2, L_1, L_2, s, k)$?

Question 7 Donnez un algorithme qui donne une solution à MCP$(G = (V, E), w_1, w'_2, L_1, x, s, k)$ en temps polynomial.