**Sujet de stage :** Fonctions de pulvérisation d'hypergraphes géométriques

**Équipe :** Projet VEGAS, INRIA-Lorraine, Nancy

**Encadrant :** Xavier Goaoc (mail : goaoc@loria.fr ; page web : `http://www.loria.fr/~goaoc`)

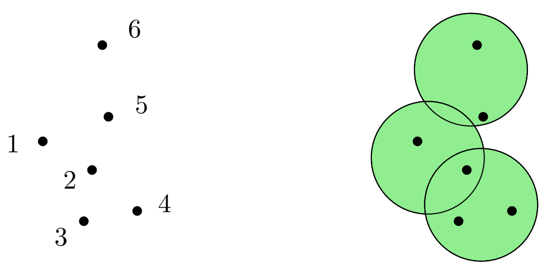
**Environnement.** L'équipe-projet VEGAS (`http://vegas.loria.fr/`), commune à l'*INRIA Nancy Grand-Est* et au laboratoire *Loria*, se spécialise dans le domaine de la géométrie algorithmique et combinatoire, au sein du département "Algorithmique, calcul, géométrie et image" du Loria.

**Résumé.** Le but de ce stage est d'estimer la complexité d'hypergraphes et de familles de permutations soumises à des contraintes de "pulvérisation". Ces questions trouvent leur origine en géométrie algorithmique, où ces structures combinatoires servent à décrire la géométrie "efficacement" et il est important d'avoir de bonnes bornes sur leur complexité asymptotique ; leur origine géométrique fait que des contraintes dites "de pulvérisation" apparaissent naturellement.

**Structures géométriques.** Pour analyser ou manipuler un objet géométrique, il est fréquent de lui associer un objet combinatoire qui met en lumière certaines de ses propriétés. Les structures combinatoires induites par la géométrie, ou *structures géométriques*, ont un rôle central en traitement algorithmique de questions géométriques. Considérons par exemple la question de couvrir un ensemble $P$ de $n$ points du plan au moyen d'un nombre aussi petit que possible de disques de rayon 1, version simplifiée du problème qui se pose quand on veut installer des bornes wifi, des antennes relai, etc... en s'assurant qu'un ensemble d'utilisateurs statiques sont couverts. Si on note $H$ l'ensemble de sous-ensembles de $P$, i.e. l'*hypergraphe* d'ensemble de sommets $P$, défini par

$$H = \{P \cap D \mid D \text{ est un disque de rayon } 1\}$$

(c.f. Figure 1) alors le problème revient à trouver une sous-famille de $H$ de cardinalité minimum et dont l'union égale $P$ ; c'est le problème classique du SETCOVER. On peut montrer que si $P$ contient $n$ points alors le nombre maximum d'hyperarêtes de $H$ est $O(n^3)$ ; cela permet d'obtenir de meilleurs algorithmes d'approximation pour SETCOVER (qui est, en général, NP-difficile).




$$H = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\},\\ \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\},\\ \{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,4,5\}\}$$

Figure 1: Un ensemble de points du plan (gauche), l'hypergraphe $H$ induit par les disques de rayon 1 (droite) et des exemples de disques sélectionnant les hyperarêtes $\{1,2\}$, $\{5,6\}$ et $\{2,3,4\}$ de l'hypergraphes (centre).

**Objectifs du stage.** L'objectif du stage sera d'étudier comment la connaissance partielle de la *fonction de pulvérisation* d'un hypergraphe permet d'estimer l'asymptotique de son nombre d'hyperarêtes. La fonction de pulvérisation compte le nombre de "traces" distincte que ses hyperarêtes peuvent avoir sur les ensembles de sommets de taille donnée. Formellement, pour un hypergraphe $H$ d'ensemble de sommets $V$ elle est définie par :

$$f_H(m) = \max_{S \subseteq V; \#S = m} \#\{e \cap S \mid e \text{ hyperarête de } H\}$$

Calculer $f_H(k)$ pour une petite valeur de $k$ revient à comprendre la structure des hypergraphes définis comme $H$ mais pour $k$ points. C'est donc relativement aisé pour des petites valeurs de $k$. Il est par exemple connu que si $f_H(4) = 8$ alors $H$ a $O(n\sqrt{n})$ hyperarêtes et que cette borne est optimale ; par contre, si on sait que $f_H(5) = 16$ implique que $H$ a $O(n^3)$ on sait seulement que ce nombre peut être $\Omega(n^2)$ [2]. Le stage pourra au choix se concentrer sur :

- Explorer de nouvelles méthodes pour contrôler l'asymptotique du nombre d'hyperarêtes d'un hypergraphe étant donné une ou plusieurs valeurs de sa fonction de pulvérisation (par exemple $f_H(5) = 16$). On pourra par exemple s'intéresser aux $f$-vecteurs d'hypergraphes *monotone* [1, Chapitre 5], cas auquel le problème générale se ramène par *shifting* [1, Chapitre 17].
- Considérer la même question sur les familles de permutations, pour lesquelles un analogue de la fonction de pulvérisation peut être définie [2].
- Étudier les fonctions de pulvérisation d'hypergraphes géométriques, par exemple ceux issus de problèmes de gallerie d'art [3], afin d'en déterminer de nouvelles valeurs (et, par là, d'affiner l'estimation de leur complexité asymptotique).

## References


[1] B. Bollobás, *Combinatorics: set systems, hypergraphs, families of vectors, and combinatorial probability*, Cambridge University Press, 1986.

[2] O. Cheong, X. Goaoc and C. Nicaud, *Set Systems and Families of Permutations with Small Traces*, preprint, `http://www.loria.fr/~goaoc/papers/shatter.pdf`

[3] A. Gilbers and R. Klein, *A New Upper Bound for the VC-Dimension of Visibility Regions*, SoCG 2011. `www.cs.umn.edu/~isler/pub/vcsocg-tr.pdf`