

Proposition de stage

Titre du stage : Isolation de racines complexes de polynômes

Thématique : algorithmique et calcul formel

Laboratoire : INRIA/LORIA, Nancy (www.loria.fr)

Équipe : CAMEL (<http://caramel.loria.fr/>)

Directeur de stage : Paul Zimmermann, Paul.Zimmermann@loria.fr

Directeur de laboratoire : Karl Tombre, Karl.Tombre@loria.fr

Présentation générale du domaine : En calcul formel, l'objet le plus simple que l'on puisse construire avec une variable symbolique est le polynôme. Les opérations sur les polynômes sont donc des briques de base du calcul formel, et il est crucial qu'elles soient effectuées efficacement. L'une de ces opérations est l'approximation des racines (réelles ou complexes) d'un polynôme. On distingue deux classes d'algorithmes pour résoudre ce problème : ceux qui fournissent une borne rigoureuse sur la qualité de l'approximation renvoyée, et les autres... On s'intéresse ici à la première classes d'algorithmes. Un exemple de « borne rigoureuse » consiste à isoler les racines du polynôme, dans des intervalles pour les racines réelles, ou dans des « boîtes » pour les racines complexes.

Objectifs du stage : L'objectif du stage est d'obtenir une implantation efficace du nouvel algorithme CEVAL proposé par Sagraloff et Yap [5, 6], pour l'isolation des racines complexes d'un polynôme. On pourra reprendre les astuces algorithmiques utilisées dans le cas réel dans l'article [4]. L'idée principale est d'isoler les racines complexes dans des boîtes de la forme $\frac{c}{2^k} \leq x < \frac{c+1}{2^k}$, $\frac{d}{2^\ell} \leq y < \frac{d+1}{2^\ell}$ où c, d, k, ℓ sont des entiers (éventuellement avec $k = \ell$). L'avantage d'une telle représentation est qu'elle permet d'obtenir directement l'arrondi de la partie réelle x et de la partie imaginaire y de la racine complexe $z = x + iy$ considérée. Pour obtenir une implantation efficace, il pourra être nécessaire de modifier ou d'améliorer l'algorithme proposé par Sagraloff et Yap.

L'implantation sera faite à l'aide des bibliothèques GNU MP [2] et GNU MPFR [1] de calcul en précision arbitraire, et sera intégrée à GNU MPFR.

On validera l'implantation en la comparant (à la fois en précision et en efficacité) aux implantations concurrentes (Maple, Mathematica, Sage, PARI/GP). Ce stage donnera lieu à une publication scientifique.

Compétences requises : ce stage nécessite de bonnes connaissances du langage C, et un goût pour les mathématiques et l'algorithmique.

Références

- [1] FOUSSE, L., HANROT, G., LEFÈVRE, V., PÉLISSIER, P., AND ZIMMERMANN, P. MPFR : A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding. *ACM Trans. Math. Softw.* 33, 2 (2007), article 13.
- [2] *GNU MP : The GNU Multiple Precision Arithmetic Library*, 5.0.1 ed., 2010. <http://gmpilib.org/>.
- [3] GOURDON, X. Algorithmique du théorème fondamental de l’algèbre. Tech. Rep. 1852, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Feb. 1993.
- [4] ROUILLIER, F., AND ZIMMERMANN, P. Efficient isolation of a polynomial real roots. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 162, 1 (2003), 33–50.
- [5] SAGRALOFF, M., AND YAP, C. K. An efficient and exact subdivision algorithm for isolating complex roots of a polynomial and its complexity analysis. <http://www.mpi-inf.mpg.de/~msagra10/ceval.pdf>, 2010. 43 pages.
- [6] SAGRALOFF, M., AND YAP, C. K. A simple but exact and efficient algorithm for complex root isolation. In *Proceedings of ISSAC’2011* (2011), pp. 353–360.